Nicolas Chéron : nicolas.cheron@ens-lyon.fr Tél : 87 14

Outils mathématiques pour la physique et la chimie

Introduction

Ce document est un rappel de notions de mathématiques “de base” (i.e. niveau L1/L2). Ce n'est en aucun cas un cours complet et rigoureux, mais plutôt une liste d'outils mathématiques dont vous aurez besoin un jour ou l'autre, aussi bien en physique qu'en chimie. J'y rappelle donc ce que je pense être utile. Pour réaliser ce support, je me suis essentiellement servi des deux livres de Xavier Gourdon *Algèbre* et *Analyse* de la collection “les maths en tête” chez Ellipses (trouvables à la bibliothèque) ainsi que de Wikipedia.

1 Généralités d'algèbre linéaire

1.1 Espaces vectoriels

Dans la mesure où nous allons parler d'espaces vectoriels par la suite, nous devons rappeller certaines définitions déjà connues qui permettent d'en parler proprement.

Définition 1 *On appelle ‘groupe' un ensemble G muni d'une loi interne * telle que :*

1. *La loi * est associative :* $\forall\ (x, y, z) \in G^3,\ (x * y) * z = x * (y * z)$
2. *Il existe un élement neutre e :* $\forall\ x \in G,\ x * e = e * x = x$
3. *Tout élement a un symétrique :* $\forall\ x \in G,\ \exists\ y \in G$ *tel que* $x * y = y * x = e$

On démontre assez facilement que l'élement neutre est unique. Si la loi * est commutative on parle de groupe commutatif.

Définition 2 *On appelle ‘espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$*' (noté* $\mathbb{K}$*-ev) un ensemble E muni d'une loi interne (notée +) et d'une loi externe (notée ·) vérifiant :*

1. *(E, +) est un groupe commutatif*
2. $\forall\ (x, y) \in E^2,\ \forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ *:*
   - $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
   - $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
   - $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
   - $1 \cdot x = x$

Le corps $\mathbb{K}$ est typiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour nous. On constate que $\lambda \cdot x = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0$.

Définition 3 *On appelle les élements de E des vecteurs, et ceux de* $\mathbb{K}$ *des scalaires.*

Rien de tel que quelques exemples pour clarifier les idées. Sont des espaces vectoriels :
- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{K}^n$ (les vecteurs sont alors des n-uplets)
- $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ qui est l'ensemble des matrices $p \times q$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
- $\mathbb{K}[X]$ qui est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
- L'espace des fonctions et bien d'autres encore ...

Définition 4 *Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. On dit que F est un sous espace vectoriel (noté sev) de E si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.*

En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un ev, on montre plutôt que c'est un sev d'un ev connu.

Proposition 5 *Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. Alors $(F, +, \cdot)$ est un sev de E si et seulement si :*

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall\ (x, y) \in F^2,\ \forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$

1.2 Bases d'espaces vectoriels

La notion de base est une notion centrale dans la compréhension de nombreux processus qu'il faut maîtriser. Elle fait appel à deux notions, les familles génératrices et les familles libres.

Définition 6 *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E et soit $A \subset E$. On note $Vect(x_i)_{i\in I}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des $(x_i)_{i\in I}$ c'est-à-dire l'ensemble des $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ pour tout λ_i. On dit que A est une partie génératrice de E si $Vect(a)_{a\in A} = E$. (Il est immédiat que $Vect(x_i)_{i\in I}$ est un sev de E)*

Dit différemment, si A est une partie génératrice de E, on peut écrire n'importe quel élément de E comme une combinaison linéaire d'élements de A.

Définition 7 *Une famille est dite libre (ou non liée) si aucun des vecteurs de la famille n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs, ce qui est équivalent à dire que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall\ i,\ \lambda_i = 0$.*

Exemple : la famille des $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre : on ne peut pas écrire x^3 comme combinaison linéaire des $(x^n)_{n\in\mathbb{N},\ n\neq 3}$.

Définition 8 *Une famille libre et génératrice d'un ev E est appelée une base de E.*

Proposition 9 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev admettant une base $(e_i)_{i\in I}$. Alors tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$: $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$. Les $(\lambda_i)_{i\in I}$ s'appellent les coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.*

Le fait qu'on puisse écrire décomposer tout vecteur de E sur la base vient du caractère générateur, et le fait que l'écriture soit unique vient du caractère libre.

Définition 10 *On dit qu'un $\mathbb{K}$-ev E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de E.*

Proposition 11 *On peut montrer que :*
- *Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie admet une base*
- *De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E*
- *Toute partie libre peut être complétée en une base*

Il est important de bien garder en tête qu'un même espace vectoriel peut avoir plusieurs bases, i.e. qu'un vecteur peut se décomposer de différentes façons. Regardons l'espace des polynômes : $(1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...)$ est une base, mais $(1-x, 1+x, x^2-x^3, x^2+x^3, ..., x^{2n}-x^{2n+1}, x^{2n}+x^{2n+1}, ...)$ en est une autre.

1.3 Applications linéaires

Définition 12 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$ une application. On dit que f est linéaire si $\forall\ (x,y) \in E^2,\ \forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Si E=F on dit que f est un endomorphisme.*

La dérivation ou l'intégration d'une fonction sont par exemple des applications linéaires.

2 Matrice

2.1 Généralités

Définition 13 *Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice de type (p,q) à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q}$ avec $\forall\ (i,j),\ a_{i,j} \in \mathbb{K}$. On la note :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Les matrices sont particulièrement utiles pour représenter des applications linéaires. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie (dim $E = q$, dim $F = p$) ; soit $h : E \to F$ une application linéaire de E dans F. Soient $B_E = (e_1, \dots, e_q)$ une base de E et $B_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Pour tout j ($1 \leqslant j \leqslant q$), on peut écrire $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} \cdot f_i$ avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. On peut regrouper tous les coefficients $a_{i,j}$ dans une matrice A, où la j-ème colonne représente les coordonnées dans B_F de l'image du j-ème élément de B_E.

Comme on l'a dit, un ev peut avoir plusieurs bases. Une application linéaire a donc plusieurs représentations matricielles selon les bases choisies pour E et pour F. Nous revenons sur ce point un peu plus loin.

Définition 14 *Soient (p,q,r) $\in (\mathbb{N}^*)^3$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant q,\ 1\leqslant j\leqslant r} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant r} \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ par $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$. La matrice C est appelée produit des matrices A et B et on note C=AB.*

Dans l'exemple suivant, $c_{1,1}$ est égale à $a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,2} + \dots + a_{1,q}b_{1,r}$ par exemple.

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,r} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q,1} & b_{q,2} & \dots & b_{q,r} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Le produit AB de deux matrices n'est faisable que si le nombre de lignes de B est égal au nombre de colonnes de A. Il est donc évident que le produit est associatif mais pas commutatif. De plus si une matrice est définit par bloc, on peut faire le produit par bloc. Si M et M' s'écrivent :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \; et \; M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

avec : A, C à r *colonnes* ; B, D à q-r *colonnes* ; A', B' à r *lignes* ; C', D' à q-r *lignes.* Alors :

$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Le produit s'effectue donc comme avec des scalaires en faisant attention à la non-commutativité du produit de matrices.

Exemple 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3+4 & 0+21+10 & 9+6+12 \\ 20+6+14 & 0+42+35 & 45+12+42 \\ 16+2+10 & 0+14+25 & 36+4+30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 31 & 27 \\ 40 & 77 & 99 \\ 28 & 39 & 70 \end{pmatrix}$$

Définition 15 *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de A (noté ${}^tA$) la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant q,\ 1 \leqslant j \leqslant p} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ avec $a_{i,j} = b_{i,j}$.*

Si la matrice est carré, ^{t}A s'écrit en faisant le symétrique de A par rapport à la diagonale.

Définition 16 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. A est dite inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$ où I_n est la matrice identité (des 1 sur la diagonale, des 0 partout ailleurs). On note alors $B = A^{-1}$.*

La matrice A^{-1} représente l'application linéaire réciproque. Par exemple pour l'application $f : x \to \sqrt{x}$, l'application réciproque est $f : x \to x^2$.

Définition 17 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. A et B sont dites semblables si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. On peut alors écrire $A = PBP^{-1}$ où P est une matrice inversible (matrice dite de changement de base).*

Des matrices semblables ont de nombreuses propriétés communes puisqu'elles représentent le même objet. La matrice de changement de base P s'appelle aussi matrice de passage de la base initiale à la nouvelle base. On l'écrit en colonne, la i-ème colonne de la matrice de passage étant le i-ème vecteur de la nouvelle base, écrit dans l'ancienne base. C'est donc aussi la matrice de l'application identité, de l'espace E muni de la nouvelle base vers E muni de l'ancienne base.

Définition 18 *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On appelle trace de A le scalaire $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ i.e. la somme des élements diagonaux (valable que pour une matrice carrée).*

Proposition 19 *On peut montrer que :*
- *Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, $tr(AB) = tr(BA)$*
- *Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, $tr(A) = tr({}^tA)$*
- *Si A et B $\in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont semblables, alors tr(A)=tr(B)*

2.2 Déterminants

Avant de parler de valeurs propres, on va un peu parler de déterminants. En effet, en pratique, en physique ou en chimie, la recherche de valeurs propres passe souvent par un calcul de déterminants. Nous ne donnerons pas ici de définition d'un déterminant puisque ceci ferait intervenir trop de notions supplémentaires. On commence par rappeller que :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Proposition 20 *Il est bon de rappeller quelques points sur la manipulation des déterminants (tout ce qui est dit sur les lignes est valable pour les colonnes puisque $\det(A) = \det({}^tA)$) :*
- *Si deux lignes d'un déterminant sont égales, le déterminant vaut 0*
- *Si on inverse deux lignes d'un déterminant, on change son signe*
- *On ne change pas un déterminant si on ajoute à la ligne i, λ fois la ligne j*
- *Si une ligne est combinaison linéaire des autres lignes, le déterminant vaut 0 (conséquences des propriétés précédentes)*
- *On peut développer un déterminant selon les lignes : pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, on définit $A^{p,q}$ la matrice issue de A où on a enlevé la p-ème ligne et la q-ème colonne (c'est donc une matrice (n-1)·(n-1)) ; on a alors $\det(A) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{\alpha} \cdot a_{p,q} \cdot \det(A^{p,q})$ où α est le nombre de permutations de lignes qu'il faut faire pour amener $a_{p,q}$ en première ligne : si p est impaire α est pair, si p est pair α est impair. Un exemple vaut mieux qu'un long discours :*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

On voit ainsi qu'on peut se servir des déterminants pour étudier des systèmes ou des ensembles de vecteurs. Si on considère n vecteurs dans un espace à n dimensions, et qu'on veut savoir s'ils peuvent former une base de l'espace, il suffit de calculer le déterminant de ces n vecteurs i.e. le déterminant de la matrice où on écrit sur la i-ème colonne le i-ème vecteur. Si le déterminant est non nul (quelque soit sa valeur), cela signifie que ces vecteurs ne sont pas liés, ils forment donc une famille libre de même dimension que l'espace i.e. une base.

Proposition 21 *Si une matrice est diagonale par bloc, alors son déterminant est le produit des blocs diagonaux. Pour la matrice M suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

où A, B, C, D, E, F sont des matrices, alors $\det(M) = \det(A)\det(D)\det(F)$.

Exemple 2 *On cherche à calculer D, avec :*

$$D = \begin{vmatrix} b+a & b-a-c & b \\ -c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & -a+c \end{vmatrix}$$

Il faut dans ces cas là faire des opérations sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des 0, si possible avoir une ligne ou une colonne avec que des 0 sauf à 1 endroit. On peux alors développer le déterminant par rapport à cette ligne/colonne.
Ici on commence par faire l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$. D'où :

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ -c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & -a+c \end{vmatrix}$$

On peut mettre $(a+b+c)$ en facteur, et après on fait l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$:

$$D = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & -a+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -c & 2a & 0 \\ 2c & 2c & -a-c \end{vmatrix}$$

On peut donc développer par rapport à la dernière colonne :

$$D = 0 + 0 + (a+b+c)(-a-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -c & 2a \end{vmatrix} = -(a+b+c)(a+c)(2a+c)$$

2.3 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 22 *Soit f une application linéaire. On appelle valeur propre un scalaire λ qui vérifie $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$; le vecteur x associé s'appelle vecteur propre. En utilisant l'écriture matricielle cela se note $AX = \lambda X$. La recherche des valeurs propres est un problème centrale en mécanique quantique par exemple.*

Définition 23 *Diagonaliser une application linéaire consiste à rechercher une base de l'espace vectoriel considéré constituée de vecteurs propres pour l'endomorphisme. L'écriture matricielle de l'endomorphisme dans cette base est alors une matrice diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. En effet, on a alors $f(e_i) = \lambda_i e_i$ en notant e_i le i-ème élement de la base de vecteurs propres et on aura donc λ_i sur la diagonale de la matrice, et des 0 sur le reste de la ligne.*
Un endomorphisme est dit diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propres pour cette endomorphisme.

Proposition 24 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n* $\in \mathbb{N}*$, *et f est un endormorphisme de E d'écriture matricielle A dans une base donnée. On a vu que si* λ *est une valeur propre de A,* $AX = \lambda X$ *; on a donc* $(A - \lambda I_n)X = 0$ *(où* I_n *est la matrice identité). Une façon de trouver les valeurs propres est donc de résoudre le système d'équation :* $\det(A - \lambda I_n) = 0$ *; en développant le déterminant on trouve un polynôme et l'équation s'appelle alors équation caractéristique. Quand on a trouvé une valeur propre* λ_0*, pour trouver le vecteur propre associé il suffit de re-injecter* λ_0 *dans le système.*

Exemple 3 *On cherche les valeurs propres de :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On cherche en premier lieu l'équation caractéristique :

$$\det(A - xId) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = (1-x)(4-x) - 6 = x^2 - 5x + 4 - 6$$

On cherche donc à résoudre : $x^2 - 5x - 2 = 0$. *On trouve 2 solutions qui sont les valeurs propres et qui sont donc* $x = (5 \pm \sqrt{33})/2$.
On ne perd jamais rien à vérifier ses calculs. La somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice et est indépendante de la base. La somme des valeurs propres doit donc être égale à $tr(A)$*, ce qui est le cas ici et vaut 5. Le produit des valeurs propres est quant à lui égale au déterminant de la matrice A. Ici ce produit vaut* $(25 - 33)/4 = -2$ *et est bien égal à* $4 - 6$.

Exemple 4 *On cherche les valeurs propres de A (avec m réel) :*

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

On cherche là encore l'équation caractéristique. On va poser $u = m - x$ *pour simplifier les calculs. On commence par faire* $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ *:*

$$det(A - xId) = \begin{vmatrix} u & 1 & 1 \\ 1 & u & 1 \\ 1 & 1 & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & 1 & 0 \\ 1 & u & 1-u \\ 1 & 1 & u-1 \end{vmatrix} = (1-u) \begin{vmatrix} u & 1 & 0 \\ 1 & u & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Puis on fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$*, et on développe par rapport à la 3ème colonne :*

$$det(A - xId) = (1-u) \begin{vmatrix} u & 1 & 0 \\ 2 & u+1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1-u)(-1) \begin{vmatrix} u & 1 \\ 2 & u+1 \end{vmatrix} = (u-1)(u^2+u-2)$$

Le polynôme s'annule pour $1, 1, -2$. *Les valeurs propres sont donc* $m-1, m-1, m+2$.

Proposition 25 *On a vu que si A et B sont semblables,* $A = PBP^{-1}$. *Si A est diagonalisable, A est semblable avec sa matrice diagonalisé D. On a donc* $A = PDP^{-1}$. *Vu ce qu'on a dit précedemment, la i-ème colonne de la matrice de passage est le i-ème vecteur propre de A écrit dans la base de départ. On trouvera alors en i-ème place de la matrice diagonale le vecteur propre associé.*

Proposition 26 *Si f est un endormorphisme de E et si E est de dimension finie égale à n* $\in \mathbb{N}*$*, alors f a au plus n valeurs propres. Si f est diagonalisable, f a exactement n valeurs propres (certaines pouvant être redondantes) et on a alors* $\det f = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ *où les n* λ_i *sont les valeurs propres.*

Proposition 27 *On appelle sous-espace propre associé à une valeur propre* λ *l'ensemble des* $\{X\}$ *vérifiant* $AX = \lambda X$.

Proposition 28 *En dimension n, si une matrice a n valeurs propres différentes, elle est diagonalisable. Si certaines valeurs propres apparaissent plusieurs fois, on dit qu'elles ont une multiplicité. Une matrice sera diagonalisable si la dimension du sous-espace propre associé à chaque valeur propre est égale à la multiplicité de la valeur propre. Par exemple pour l'exemple 4, A est diagonalisable si la dimension du sous-espace associé à m-1 est 2 (la dimension d'un sous-espace propre est au moins de 1 et au plus de la multiplicité, donc pour une valeur propre de multiplicité 1, il n'y a pas à vérifier quoi que ce soit).*

Exemple 5 *La matrice suivante est-elle diagonalisable (avec m réel) :*

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

On sait que les valeurs propres sont $m-1, m-1, m+2$*. On cherche donc la dimension du sous-espace associé à m-1. Pour cela, on résoud* $AX = (m-1)X$ *ce qui équivaut à* $\big(A - (m-1)I_3\big)X = 0$ *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

D'où :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$x+y+z=0$ *est l'équation d'un plan dans l'espace, i.e. d'un espace de dimension 2 (si ça ne vous parle pas trop, dites-vous qu'en choisissant 2 des paramètres, le troisième s'en retrouve fixé, c'est donc un espace de dimension 2). Cette matrice est donc bien diagonalisable.*

Proposition 29 *Il a été démontré que certaines matrices sont tout le temps diagonalisables. Ainsi, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles.*

Proposition 30 *Pour les réelles et les complexes,* $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$*. On définit de cette façon l'exponentielle d'une matrice. En pratique, il n'est pas trés pratique de calculer une infinité de puissance d'une matrice et d'en faire la somme, mais pour une matrice diagonale :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \textit{on a :}\ e^A = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Il est alors trés aisé de calculer l'exponentielle d'une matrice B diagonalisable en une matrice A : on a $B = PAP^{-1}$. Et alors $e^B = Pe^AP^{-1}$.

Exemple 6 *Soit a réel, n entier. On veut calculer M^n pour :*

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On va ici utiliser une autre méthode que celle qu'on vient de présenter. On peut écrire $M = A - I_3$ et on utilise ensuite la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k (-1)^{n-k} {I_3}^{n-k} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k (-1)^k \end{aligned}$$

Cette méthode est intéressante seulement si A^k est nul ou fixe à partir d'une certaine valeur de k ; ici $A^3 = 0$. On a donc :

$$M^n = (-1)^n \left(I_3 - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 \right) \quad \textit{pour } n \geqslant 3$$

On peux vérifier que la formule reste valable pour 0,1,2.

3 Résolutions de systèmes

Nous allons trés brièvement rappeller ici comment résoudre un système d'équations. On peut toujours faire des combinaisons linéaires des équations pour arriver à un nouveau système plus simple. Nous présentons ici la résolution avec l'écriture matricielle en s'appuyant sur un exemple.

Exemple 7 *On cherche à résoudre le système suivant (m nombre complexe donné) :*

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y - mz = 1 \\ 2x + my - z = 2m^2 \\ mx - y = 2m - 1 \\ -x + y + z = 2m \end{array} \right.$$

Il y a 4 équations et 3 inconnus : soit le problème n'a pas de solutions, soit une des équations est combinaison linéaire des autres et elle ne sert donc à rien. Ici en faisant $L_1 \leftarrow L_1 + L_3 - L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - (1-m)L_4$, la première ligne devient 0=0. On reste donc avec les 3 dernières équations qu'on peut écrire sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} 2 & m & -1 \\ m & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2 \\ 2m-1 \\ 2m \end{pmatrix}$$

On note A la matrice du système, et Y le second membre. On a donc $AX = Y$. Un tel système a une solution si $\det(A) \neq 0$. Ici $det(A) = m^2 + m + 1$, donc $det(A) = 0$

ssi $m = e^{\frac{\pm 2\imath\pi}{3}}$. *Dans ce cas là, le système n'aura pas de solutions. Si on considère* $m \neq e^{\frac{\pm 2\imath\pi}{3}}$, *on a alors :*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2m^2 & m & -1 \\ 2m-1 & -1 & 0 \\ 2m & 1 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2m^2 & -1 \\ m & 2m-1 & 0 \\ -1 & 2m & 1 \end{vmatrix}}{det(A)}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m & 2m^2 \\ m & -1 & 2m-1 \\ -1 & 1 & -2m \end{vmatrix}}{det(A)}$$

i.e. pour trouver le i-ème élément du système, on divise par $\det(A)$ *le déterminant de la matrice du système dans laquelle on a remplacé la i-ème colonne par le vecteur Y. On a donc :*

$$x = \frac{4m^2+3m-1}{m^2+m+1}$$
$$y = \frac{2m^3+2m^2-2m+1}{m^2+m+1}$$
$$z = \frac{4m^2+7m-2}{m^2+m+1}$$

4 Calcul intégral

On rappelle juste deux formules utiles en cas d'intégrales numériques à calculer :

Proposition 31 *(Intégration par parties) : soient u,v :* $[a,b] \to \mathbb{C}$ *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$. *Alors :*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big[u \cdot v\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exemple 8 *On veut calculer :*

$$I = \int_0^{\pi/3} x\cos(x)dx$$

On pose $u = x$, $v' = \cos x$. *On a donc* $u' = 1$ *et* $v = \sin x$ *:*

$$I = [x\sin x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \sin x dx = \pi\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$$

Proposition 32 *(Changement de variables) : soit* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $f : I \subset \mathbb{R} \to E$ *une application continue telle que* $\varphi([a,b]) \subset I$. *Alors :*

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Exemple 9 *On veut calculer :*

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$$

On pose : $u = \sqrt{e^x - 1}$*, d'où* $x = \ln(1+u^2)$*. On a donc* $dx = \frac{2u}{1+u^2}du$*. Quand* $x = 0$*,* $u = 0$ *et quand* $x = \ln 2$*,* $u = 1$*. On peut donc écrire :*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 u\frac{2u}{1+u^2}du = 2\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2}du \\ &= 2\int_0^1 du - 2\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du \\ &= 2[u]_0^1 - 2[\arctan(u)]_0^1 \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

5 Développements limités

Définition 33 *Soit* $f : I \to E$ *une application et supposons* $0 \in I$*. Si* $n \in \mathbb{N}^*$*, on dit que* f *admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de 0 s'il existe* $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n \in E$ *tels que, au voisinage de 0 :*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + o(x^n)$$

Pour faire un DL au voisinage de x_0*, on fait le changement de variable* $X = x - x_0$ *puis on le fait autour de 0.*

Proposition 34 *Si* $f : I \to E$ *est une application* n *fois dérivable en 0, alors* f *admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre* n *suivant :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Proposition 35 *On rappelle quelques DL usuels au voisinage de 0 :*

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} + o(x^n) \\ \textit{d'où } \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\ \textit{et } \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\ldots(2n)} + o(x^n) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8) \end{aligned}$$

On peut faire des sommes, produits, quotients, compositions de développements limités : il faut juste faire attention à les faire au même ordre. Une solution sûre est de les faire à un ordre supérieur puis de tronquer au dernier moment. Ou de demander à sa calculatrice de les faire. On peut aussi intégrer et dériver des DL, avec les bonnes précautions mathématiques (c'est d'ailleurs comme ça que certains des DL rappellés se retrouvent). Enfin, rappellons que le DL d'une fonction paire ne fera intervenir que des puissances paires de x et pour une fonction impaire que des puissances impaires de x.

Exemple 10 *On cherche à déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de* $\ln(1+x)\cdot\sin(x)$.
On a : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ *et* $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$. *D'où :*

$$\begin{aligned}
\ln(1+x)\cdot\sin(x) &= (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})(x - \frac{x^3}{3!}) + o(x^4) \\
&= (x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}) - (\frac{x^4}{6}) + o(x^4) \\
&= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Exemple 11 *On cherche à déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de* $\ln(\cos x)$.
On sait que : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$. *On pose* $X = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ *et on sait que* $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + o(X^4)$. *On peut donc écrire :*

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + o(X^4) \\
&= (-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}) - \frac{(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})^3}{3} - \frac{(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})^4}{4} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

6 Trigonométrie

Proposition 36 *Pour finir, quelques formules de trigonométrie :*

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b \quad ; \quad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b \quad ; \quad \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b} \quad ; \quad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \\
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad ; \quad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad ; \quad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

A partir des 4 premières formules, en faisant les bonnes combinaisons linéaires, on trouve trés facilement les formules de $\sin a\cos b$, $\cos a\cos b$ et $\sin a\sin b$. Avec $a = b$ on trouve des formules trés pratiques pour les changements de variables dans les intégrales.