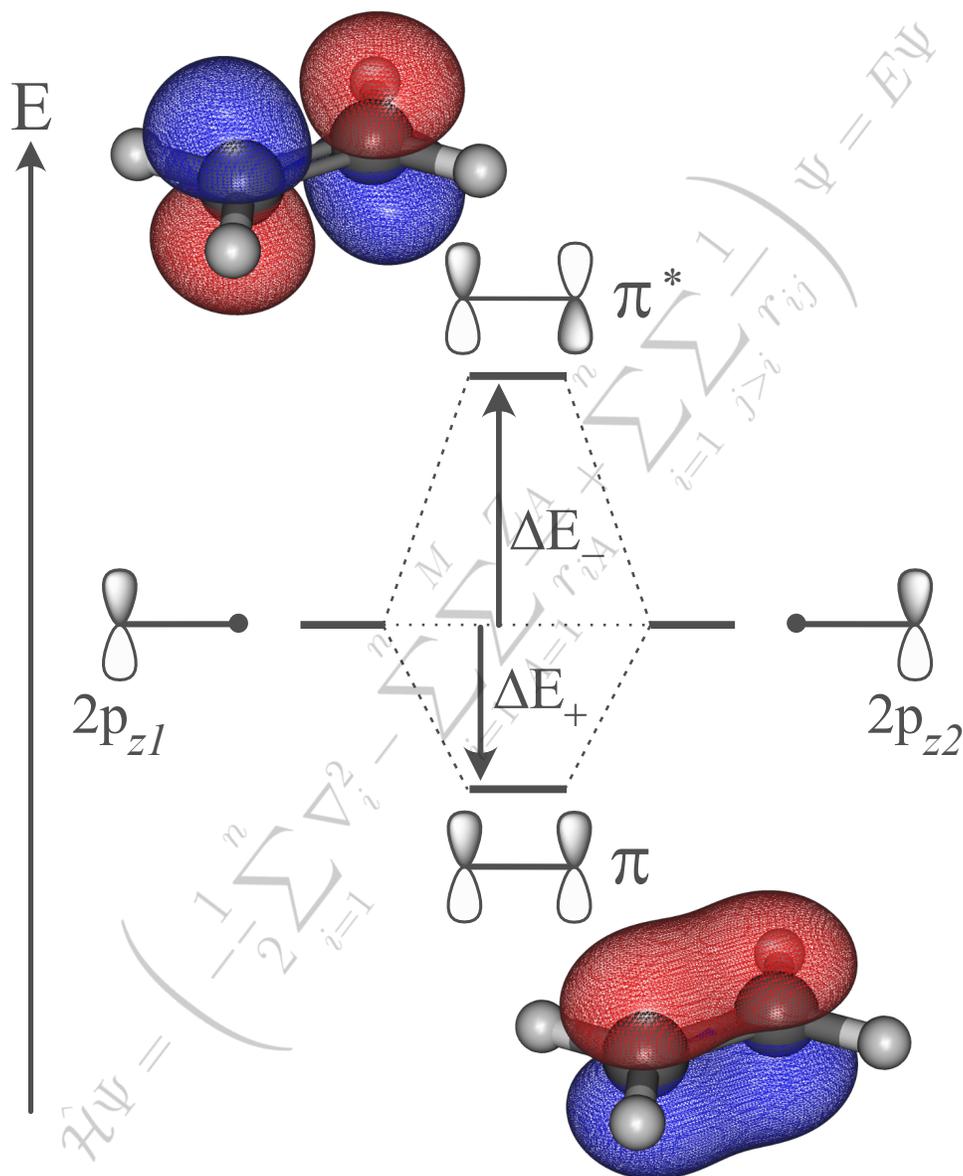


# Cours de chimie théorique

Nicolas Chéron  
nicolas.cheron@ens.psl.eu

3 octobre 2024



# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>0</b> | <b>Introduction</b>  | <b>5</b>  |
| <b>1</b> | <b>Mécanique quantique</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1      | Historique . . . . .   | 6         |
| 1.2      | Résultats préliminaires . . . . .                                      | 6         |
| 1.3      | Mécanique quantique . . . . .  | 7         |
| 1.4      | Chimie théorique . . . . .   | 10        |
| <b>2</b> | <b>Méthodes de résolutions</b>   | <b>11</b> |
| 2.1      | Approche perturbative . . . . .  | 11        |
| 2.2      | Approche variationnelle . . . . .                                      | 13        |
| <b>3</b> | <b>Le problème monoélectronique</b>                                    | <b>14</b> |
| 3.1      | Équation de Schrödinger monoélectronique . . . . .                     | 14        |
| 3.2      | Formes des solutions . . . . .   | 15        |
| 3.3      | Représentation des solutions . . . . .                                 | 17        |
| 3.4      | Énergies des orbitales . . . . .                                       | 19        |
| 3.5      | Le spin . . . . .  | 20        |
| 3.6      | Unités atomiques . . . . .   | 21        |
| <b>4</b> | <b>Les atomes polyélectroniques</b>                                    | <b>22</b> |
| 4.1      | Position du problème . . . . .   | 22        |
| 4.2      | Hamiltoniens effectifs . . . . .                                       | 22        |
| 4.3      | Électrons de cœur et électrons de valence . . . . .                    | 23        |
| 4.4      | Énergie . . . . .  | 23        |
| 4.5      | Atomistique . . . . .  | 24        |
| 4.6      | Modèle de Slater . . . . .   | 26        |
| <b>5</b> | <b>Les molécules</b>   | <b>30</b> |
| 5.1      | Approximation de Born-Oppenheimer . . . . .                            | 30        |
| 5.2      | Approximation orbitalaire . . . . .                                    | 30        |
| 5.3      | Approximation LCAO . . . . .   | 31        |
| 5.4      | Équations séculaires . . . . .   | 31        |
| 5.5      | Indiscernabilité des électrons . . . . .                               | 32        |
| <b>6</b> | <b>Théorie des groupes</b>   | <b>34</b> |
| 6.1      | Préliminaires . . . . .  | 34        |
| 6.2      | Représentation d'un groupe . . . . .                                   | 37        |
| 6.3      | Caractères . . . . .   | 40        |
| 6.4      | Réduction d'une représentation . . . . .                               | 42        |
| 6.5      | Projecteurs . . . . .  | 44        |
| 6.6      | Exemple : orbitales moléculaires du système $\pi$ du benzène . . . . . | 45        |
| 6.7      | Produit direct . . . . .   | 48        |
| 6.8      | Compléments . . . . .  | 48        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>7</b>  | <b>Construction d'orbitales moléculaires</b>              | <b>49</b> |
| 7.1       | Interaction de deux orbitales identiques . . . . .        | 49        |
| 7.2       | Interaction de deux orbitales différentes . . . . .       | 54        |
| 7.3       | Liaisons ioniques . . . . .                               | 56        |
| 7.4       | Recouvrement . . . . .                                    | 57        |
| 7.5       | Symétrie . . . . .  | 58        |
| 7.6       | Méthode des fragments . . . . .                           | 58        |
| 7.7       | Molécules AH <sub>2</sub> linéaires . . . . .             | 59        |
| 7.8       | Interaction à trois orbitales . . . . .                   | 61        |
| 7.9       | Molécules AH <sub>2</sub> coudées (l'eau) . . . . .       | 61        |
| 7.10      | Diagrammes de Walsh et géométries des molécules . . . . . | 64        |
| 7.11      | Molécules diatomiques de la deuxième période . . . . .    | 65        |
| <b>8</b>  | <b>Méthodes de Hückel</b>                                 | <b>72</b> |
| 8.1       | Historique . . . . .                                      | 72        |
| 8.2       | Méthode de Hückel simple . . . . .                        | 72        |
| 8.3       | Paramètres . . . . .                                      | 72        |
| 8.4       | Utilisation . . . . .                                     | 73        |
| 8.5       | Résultats supplémentaires . . . . .                       | 75        |
| 8.6       | Polyènes . . . . .  | 76        |
| 8.7       | Utilisation de la symétrie . . . . .                      | 76        |
| 8.8       | Règle de Hückel . . . . .                                 | 78        |
| 8.9       | Méthode de Hückel étendue . . . . .                       | 78        |
| <b>9</b>  | <b>Réactivité</b>   | <b>79</b> |
| 9.1       | Orbitales frontières et règle de Fukui . . . . .          | 79        |
| 9.2       | Contrôle frontalier . . . . .                             | 80        |
| 9.3       | Exemple de la réaction de Diels-Alder . . . . .           | 80        |
| 9.4       | Assistance électrophile . . . . .                         | 82        |
| 9.5       | Effets électroniques des substituants . . . . .           | 82        |
| <b>10</b> | <b>Absorption de photon et spectroscopies</b>             | <b>83</b> |
| 10.1      | Transitions entre OM . . . . .                            | 83        |
| 10.2      | Spectroscopie UV-Visible . . . . .                        | 83        |
| 10.3      | Exemple d'absorptions entre deux OM . . . . .             | 83        |
| <b>11</b> | <b>Calculs de chimie quantique</b>                        | <b>85</b> |
| 11.1      | Méthode du champ auto-cohérent . . . . .                  | 85        |
| 11.2      | Les différentes familles de méthodes . . . . .            | 85        |
| 11.3      | Les bases d'orbitales . . . . .                           | 86        |
| 11.4      | Méthode Hartree-Fock . . . . .                            | 87        |
| 11.5      | Méthodes semi-empiriques . . . . .                        | 88        |
| 11.6      | Théorie de la fonctionnelle de la densité . . . . .       | 89        |
| 11.7      | Réponses aux questions du jury . . . . .                  | 89        |

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>12 Bonus - Spectroscopie atomique</b>                           | <b>91</b>  |
| 12.1 Perturbations . . . . .                                       | 91         |
| 12.2 Moments angulaires - Rappels de mécanique quantique . . . . . | 93         |
| 12.3 Termes spectroscopiques des atomes . . . . .                  | 94         |
| 12.4 Dégénérescence des niveaux . . . . .                          | 94         |
| 12.5 Termes associés à une configuration . . . . .                 | 95         |
| 12.6 États spectroscopiques . . . . .                              | 96         |
| 12.7 Classement énergétique . . . . .                              | 97         |
| 12.8 Cas du couplage $j/j$ . . . . .                               | 98         |
| 12.9 Applications . . . . .  | 98         |
| <b>13 Bonus - Spectroscopie moléculaire</b>                        | <b>99</b>  |
| 13.1 Molécules à couches fermées . . . . .                         | 99         |
| 13.2 Molécules à couches ouvertes . . . . .                        | 99         |
| 13.3 Molécules linéaires . . . . .                                 | 99         |
| <b>14 Exercices</b>  | <b>101</b> |
| 14.1 Atomes et atomistique . . . . .                               | 101        |
| 14.2 Théorie des groupes . . . . .                                 | 102        |
| 14.3 Diagrammes d'OM . . . . .                                     | 103        |
| 14.4 Méthode de Hückel . . . . .                                   | 105        |
| 14.5 Bonus - Spectroscopie . . . . .                               | 106        |
| <b>15 Bibliographie</b>  | <b>107</b> |
| <b>16 Tables de caractères</b>                                     | <b>108</b> |
| <b>17 Corrections des exercices</b>                                | <b>109</b> |
| 17.1 Atomes et atomistique . . . . .                               | 109        |
| 17.2 Théorie des groupes . . . . .                                 | 112        |
| 17.3 Diagrammes d'OM . . . . .                                     | 125        |
| 17.4 Méthode de Hückel . . . . .                                   | 131        |
| 17.5 Bonus - Spectroscopie . . . . .                               | 138        |

## 0 Introduction

Ce cours a pour ambitions de revoir des notions de L1/L2/L3, voire M1, pour les étudiants qui préparent l'agrégation de chimie. Il n'a pas la prétention d'être un cours complet de chimie théorique. À ce titre, il n'est pas exhaustif sur ce qu'on peut attendre pour le concours de l'agrégation et certaines parties seront moins détaillées que d'autres, ou directement admises. Certains points sont quant à eux abordés plus spécifiquement dans les exercices. Notre but sera de raviver de vieux souvenirs et rappeler (ou apprendre) d'où viennent certains résultats qui sont utilisés en routine. Nous parlerons entre autre de la construction des orbitales atomiques, d'atomistique, de théorie des groupes, ou encore de la construction d'orbitales moléculaires. Je propose ici un support écrit, dans lequel je détaille certains points plus en détails que ce qui sera vu en séances. C'est volontaire : à la fin d'une leçon, les questions posées peuvent être de différentes natures et de différents niveaux. Le but de ce cours est aussi de vous y préparer. Je n'aborderai pas en séances les chapitres 12 et 13 de ce polycopié sur les spectroscopies atomique et moléculaire car ils seront faits par un(e) autre intervenant(e). Je les ai inclus dans ce document car je les ai écrit par le passé et cela vous fournit donc un complément qui peut être utile.

Comme tout support écrit, ce document peut comporter des erreurs ou des fautes, et si vous en repérez merci de me les signaler.

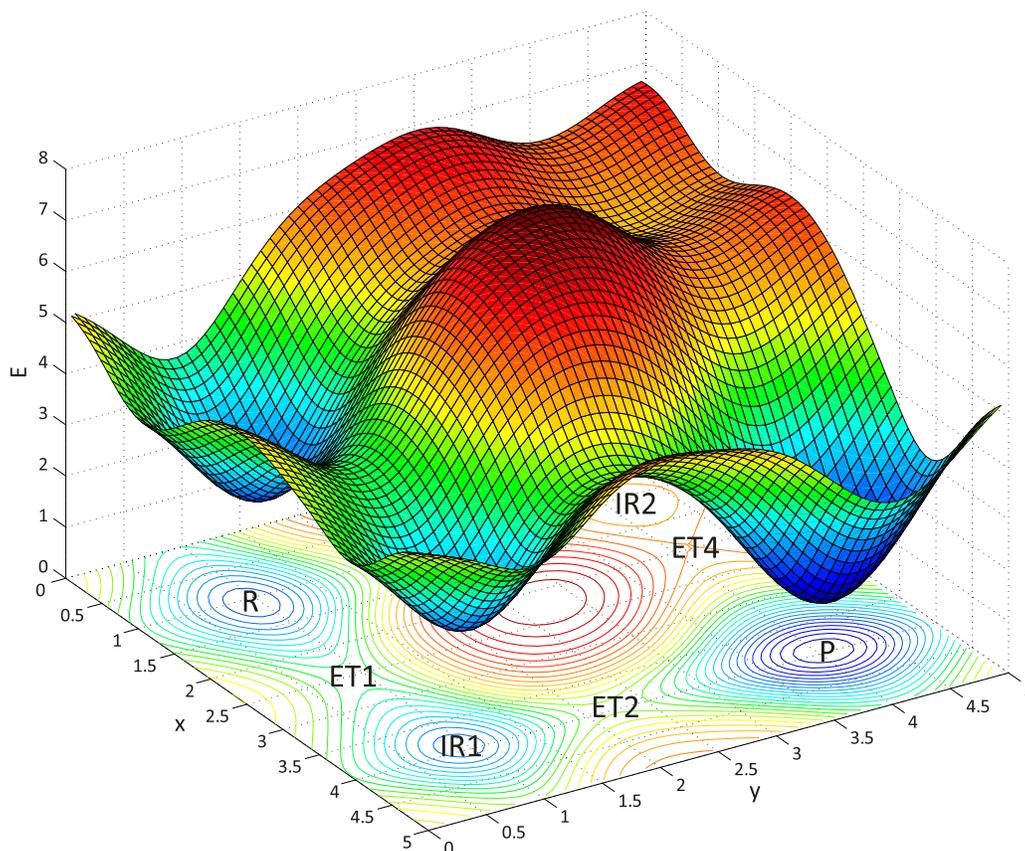


FIGURE 1 – Modèle de surface d'énergie potentielle pour une réaction  $S_N1$ , mise là uniquement pour faire joli et éviter d'avoir un gros blanc sur la page.

# 1 Mécanique quantique

## 1.1 Historique

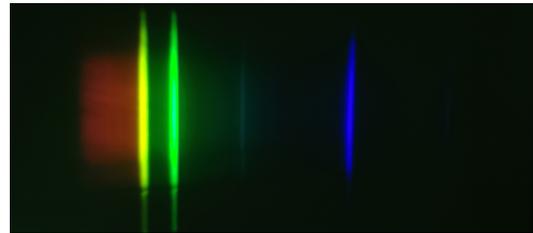
Au début était la pomme. Celle de Newton. Avec les équations posées par celui-ci, la mécanique classique peut expliquer le mouvement des planètes, les trajectoires des obus, la flottaison des bateaux... L'avènement de la thermodynamique a pu expliquer les transferts de chaleurs et les machines thermiques et les équations de Maxwell ont ensuite pu expliquer la propagation des ondes électromagnétiques. A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, un sentiment de complétude animait donc certains scientifiques, ce qui a fait dire à William Thomson (dit Lord Kelvin) en 1897 : *“There is nothing new to be discovered in physics now. All that remains is more and more precise measurement”*. Deux ans après la citation de W. Thomson, Joseph John Thomson (aucun lien entre les deux Thomson) découvre l'électron, preuve de la naïveté de W. Thomson.

Avec le développement industriel et technologique, de nouvelles expériences peuvent être faites au début du XX<sup>ème</sup> siècle, et certaines ne peuvent pas être expliquées par la physique classique (cf Figure 2) :

- Pourquoi une barre de fer devient rouge, orange puis blanche quand on la chauffe ?
- Quelle est l'origine de l'effet photoélectrique ?
- D'où viennent les spectres de raies ?



(a) Barre de fer chauffée (©ActuSF).



(b) Raies d'une lampe à mercure.

FIGURE 2 – Exemples d'expériences non explicables par la physique classique.

Ces problèmes ont permis le développement d'un nouveau domaine de la physique, la mécanique quantique, dans le premier quart du XX<sup>ème</sup> siècle, qui a ensuite été naturellement appliquée à la chimie.

## 1.2 Résultats préliminaires

Pour expliquer le rayonnement du corps noir, Max Planck postule vers 1900 (prix Nobel 1918) que seules certaines valeurs énergétiques (appelées *quanta d'énergie*) sont possibles dans les échanges matière-rayonnement ; les échanges ne se font que par paquets de quanta. Pour une radiation de fréquence  $\nu$  (émise ou absorbée), un quantum d'énergie  $\Delta E$  vaut :

$$\Delta E = h\nu$$

C'est de ce postulat que vient le **caractère particulaire** des radiations.  $h$  est la constante de Planck et vaut exactement  $h = 6,62607015 \times 10^{-34} J.s$ . Planck a ainsi pu expliquer les changements de couleurs lors de l'échauffement d'une barre de fer.

C'est en admettant ce postulat que Einstein démontra l'effet photoélectrique en 1905 (ce qui lui valu le prix Nobel 1921) et donna ainsi plus de crédit à l'hypothèse de Planck (qui n'était alors pas vraiment acceptée).

Louis de Broglie en 1924 (prix Nobel 1929) postule le **caractère ondulatoire** des particules : à toute particule d'impulsion  $p$  ( $p = mv$ ), est associée une longueur d'onde  $\lambda$  telle que :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Si la particule a une masse nulle (comme le photon),  $\lambda = hc/\Delta E$ . Cette hypothèse a été confirmée ultérieurement par des expériences de diffraction des électrons.

Werner Heisenberg (prix Nobel 1932), se servant de cette hypothèse, montra ce qu'on appelle le *principe d'incertitude* :

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

$\Delta x$  et  $\Delta p$  étant les incertitudes sur respectivement la position de l'électron et sa quantité de mouvement, et  $\hbar = h/2\pi$ . Ce qui est sous-jacent derrière cette inégalité est qu'on ne peut pas connaître avec précision à la fois la position et la quantité de mouvement d'une particule (cf Exercice 14.1.1). Il existe d'autres formulations de cette inégalité, faisant intervenir l'énergie et la durée de vie.

En 1926, Erwin Schrödinger (prix Nobel 1933) (qui travaillait sur les mêmes problèmes que Heisenberg, mais avec un formalisme différentiel) postule l'existence des fonctions d'onde (que l'on note  $\Psi$ ) ainsi que leur évolution temporelle, et formalise ainsi la mécanique quantique.

*Notation* : les fonctions d'onde  $\Psi$  sont des outils mathématiques qui appartiennent à un espace mathématique appelé *espace de Hilbert*. Ce sont en fait des *vecteurs* de cet espace qu'on note sous forme de *kets*  $|\Psi\rangle$ . À tout *ket*  $|\Psi\rangle$  est associé un *bra*  $\langle\Psi|$  représentant  $\Psi^*$ . Le produit scalaire de  $\phi$  et de  $\psi$  s'écrit  $\langle\phi|\psi\rangle$  et est à voir comme une intégrale sur l'espace de  $\phi^*\psi$ .  $\langle\phi|f|\psi\rangle$  vaut quant à lui  $\int \phi^*(r)f[\psi(r)]d\tau$ .

## 1.3 Mécanique quantique

La mécanique quantique repose sur trois postulats : le postulat d'existence de la fonction d'onde, le postulat de la mesure, l'équation de Schrödinger. Détaillons-les.

### 1.3.1 Postulat d'existence de la fonction d'onde

Tout état d'un système à  $N$  particules ponctuelles peut être décrit par une fonction  $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  appelée *fonction d'onde*, où  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ . La probabilité de trouver simultanément 1 en  $\mathbf{r}_1$ , ...,  $N$  en  $\mathbf{r}_N$  à l'instant  $t$  est alors donnée par :

$$d\mathcal{P}(1_{r_1}, \dots, N_{r_N}) = \Psi^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)d\tau_1\dots d\tau_N$$

Les particules étant quelque part, en intégrant sur l'espace on a la condition :

$$\int_{\text{espace}} \Psi^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)d\tau_1\dots d\tau_N = \int_{\text{espace}} |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)|^2 d\tau_1\dots d\tau_N = 1$$

On dit alors que les fonctions d'onde sont normalisées. C'est de la normalisation que vient la quantification dont nous parlerons par la suite.

### 1.3.2 Postulat de la mesure

Il s'énonce en deux parties :

1. À toute grandeur physique  $A$ , on associe une *observable*  $\hat{A}$  qui est un opérateur hermitique linéaire agissant dans l'espace des fonctions d'onde.
2. Les seules mesures possibles de  $A$  sont les valeurs propres de l'observable  $\hat{A}$ ; après la mesure, le système se trouve dans l'état du vecteur propre associé.

Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\hat{A}|\alpha\rangle_i = a_i|\alpha\rangle_i$$

Si la particule se trouve dans l'état  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , alors la valeur moyenne des résultats d'une mesure est égale à :

$$\langle a \rangle = \frac{\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$$

De plus, l'ensemble des états propres de  $\hat{A}$  forme une base orthonormée de l'espace de Hilbert, ce qui signifie que tout état  $\Psi$  de tout système peut se décomposer sur la base des vecteurs propres  $|\phi\rangle_i$  de l'opérateur (c'est un résultat très important) :

$$\Psi = c_1|\phi\rangle_1 + c_2|\phi\rangle_2 + c_3|\phi\rangle_3 + \dots$$

Dans le cas de la mesure, on peut donc écrire (si l'opérateur est linéaire) :

$$\langle a \rangle = \frac{\sum_i c_i^2 a_i}{\sum_i c_i^2}$$

La valeur moyenne d'une mesure est donc égale à la somme des mesures possibles, pondérées par la probabilité de trouver le système dans l'état de cette mesure  $\left(\frac{c_i^2}{\sum_i c_i^2}\right)$ .

### 1.3.3 Opérateurs

Pour la position, l'opérateur  $\hat{\mathbf{r}}$  est la multiplication par  $\mathbf{r}$ . L'opérateur associé à l'impulsion  $\mathbf{p}_x$  est  $\hat{\mathbf{p}}_x = -i\hbar(\partial \cdot / \partial x)$ . Ceci vient du parallèle avec la physique classique. En physique ondulatoire, on peut décrire une onde plane selon :

$$s(x) = A \cdot \exp \left[ 2i\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

On associe à cette onde une particule de masse  $m$  de vitesse  $\nu\lambda$  et on utilise le postulat de de Broglie ( $\lambda = h/p$ ). On a alors :

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2i\pi}{\lambda} \cdot s(x) = \frac{2i\pi p}{h} \cdot s(x) = \frac{ip}{\hbar} \cdot s(x) \quad \text{d'où :} \quad p_x \cdot s(x) = -i\hbar \frac{\partial s(x)}{\partial x}$$

L'observable énergie  $\hat{E}$  joue un rôle particulier et s'appelle *hamiltonien* (noté plutôt  $\hat{\mathcal{H}}$ ), nous allons donc détailler un peu son écriture. On va utiliser ce qu'on appelle le principe de correspondance : *pour trouver l'écriture d'un opérateur en mécanique quantique, on l'écrit en mécanique classique avec la position et l'impulsion, puis on le transpose en utilisant les formulations précédentes de ces grandeurs.* L'énergie classique totale d'une particule de masse  $m$  s'écrit :

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_p = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + E_p \\ &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + E_p \end{aligned}$$

Considérons une particule placée dans un potentiel scalaire  $V(\mathbf{r})$ <sup>1</sup>. On peut donc écrire l'opérateur hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2m} \left[ \left( -i\hbar \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right)^2 + \left( -i\hbar \frac{\partial \cdot}{\partial y} \right)^2 + \left( -i\hbar \frac{\partial \cdot}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

### 1.3.4 Équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger est une équation d'onde qui permet de décrire l'évolution d'un système. Les variations de la fonction d'onde au cours du temps sont régies par :

$$i\hbar \left( \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t)$$

En utilisant l'écriture du hamiltonien, l'équation de Schrödinger se re-écrit alors pour un système à  $N$  particules :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}} \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$$

### 1.3.5 Équation de Schrödinger stationnaire

Pour un phénomène stationnaire (i.e.  $\hat{\mathcal{H}}$  indépendant du temps), on peut écrire :  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})\phi(t)$ , d'où :

$$\begin{aligned} \phi(t)[\hat{\mathcal{H}}\psi(\mathbf{r})] &= \psi(\mathbf{r}) \left[ i\hbar \left( \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right) \right] \\ \text{et donc : } \frac{\hat{\mathcal{H}}\psi(\mathbf{r})}{\psi(\mathbf{r})} &= \frac{i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}}{\phi(t)} = K \end{aligned}$$

$K$  est à la fois une fonction de l'espace et une fonction du temps.  $K$  est donc forcément une constante indépendante du temps et de l'espace. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}\psi(\mathbf{r}) &= K\psi(\mathbf{r}) \\ \text{ainsi que : } i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} &= K\phi(t) \end{aligned}$$

---

1.  $V(\mathbf{r})$  représente l'énergie potentielle dans le système et pas le potentiel électrostatique.

$\hat{\mathcal{H}}$  étant l'opérateur énergie, on a nécessairement  $K = E$ . On retrouve donc avec la première équation la formulation stationnaire de l'équation de Schrödinger :

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = E\psi$$

La deuxième équation nous permet de décrire l'évolution temporelle du système. En résolvant l'équation différentielle, on trouve, si le système est dans l'état  $\psi_0$  à  $t=0$  :

$$\phi(t) = e^{-iEt/\hbar}$$

d'où :  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar}$

## 1.4 Chimie théorique

On peut définir la chimie théorique comme la description de la chimie à l'aide d'outils mathématiques. Certains domaines de la chimie théorique ne s'intéressent pas du tout à l'équation de Schrödinger, par exemple certaines études des systèmes biologiques où les outils sont ceux des simulations numériques et de la physique statistique. Ce genre de questions se prêtent cependant peu à un problème d'agrégation (ce n'est que mon avis, et j'espère ne pas être un mauvais prophète en écrivant cela). L'équation de Schrödinger est par contre au cœur de la chimie théorique quantique. Le but principal de la chimie théorique quantique est de décrire la structure électronique d'un système (i.e. de décrire les électrons) et donc de trouver la fonction d'onde (il existe une autre façon de procéder, dont nous ne parlerons que peu, qui consiste à regarder non pas la fonction d'onde  $\psi$  mais la densité électronique  $\rho$ ). Une fois que la fonction d'onde est connue, on peut ensuite travailler sur l'énergie du système, ses orbitales, son état de spin, etc... Sauf qu'on ne peut pas le faire de manière exacte, puisque (on le verra par la suite) dès qu'il y a plus d'un électron dans le système, le terme de répulsion inter-électronique bloque la résolution analytique. Des approximations sont donc nécessaires pour résoudre  $\hat{\mathcal{H}}\psi = E\psi$ .

## 2 Méthodes de résolutions

On ne peut pas de manière générale résoudre analytiquement les équations des systèmes intéressants. Les approximations faites s'appliquent alors soit à  $\hat{\mathcal{H}}$  (et on cherche alors les fonctions d'onde exactes) soit à  $\psi$  (on cherche alors des fonctions d'ondes approchées qui répondent le mieux possible au hamiltonien). On présente ici deux grandes stratégies dont les approximations s'appliquent à  $\psi$ . Nous verrons par la suite un exemple de cas où on approxime le hamiltonien (méthode de Hückel).

### 2.1 Approche perturbative

Pour un problème lié à  $\hat{\mathcal{H}}$ , une méthode consiste à partir des solutions connues d'un problème lié à un hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}^0$  proche de  $\hat{\mathcal{H}}$ ; on va ainsi écrire le nouveau système comme une perturbation de l'ancien.

#### 2.1.1 Exemple analytique

Prenons un exemple analytique : on veut résoudre à la main l'équation  $x^2 = 1,20$ . Pour cela on écrit  $x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$  avec  $x_0 \gg x_1 \gg x_2 \gg \dots$ ,  $x_i$  étant la perturbation à l'ordre  $i$ . On connaît les solutions de  $x^2 = 1$ , on prend donc  $x_0 = 1$ . On injecte le développement de  $x$  dans l'équation :

$$\underbrace{x_0^2}_{\text{Ordre 0}} + \underbrace{2x_0x_1}_{\text{Ordre 1}} + \underbrace{x_1^2 + 2x_0x_2}_{\text{Ordre 2}} + \dots = 1,20$$

On connaît le résultat à l'ordre 0, donc on regarde ce qui se passe à l'ordre 1 où on a :  $x_0^2 + 2x_0x_1 = 1,20$  i.e.  $x_1 = 0,1$  et  $x \approx 1,1$ . Si on garde ce résultat et qu'on passe maintenant à l'ordre 2, on arrive à l'équation  $x_1^2 + 2x_0x_2 = 0$  et on trouve  $x_2 = -0,005$  et  $x \approx 1,095$ . À l'ordre 3 on aboutit à  $x_3 = 0,0005$  et  $x \approx 1,0955$ . La bonne réponse étant  $x = 1,095445\dots$ , on constate que dès l'ordre 2 on trouve un résultat satisfaisant et qu'en augmentant l'ordre, on trouve des résultats de plus en plus intéressants. C'est l'idée de la méthode des perturbations : on part d'un problème connu, et on se rapproche du problème qui nous intéresse. Pour conclure sur cet exemple analytique, il faut remarquer que si on part de  $x_0 = 1,1$  (et donc  $x_0^2 = 1,21$ ), on trouve dès l'ordre 1 :  $x = 1,095455$ . Le choix de la fonction à l'ordre 0 aura donc une grande importance sur la convergence pour la méthode des perturbations.

#### 2.1.2 Retour aux hamiltoniens

Revenons maintenant aux hamiltoniens. On cherche les couples  $(E_n, \psi_n)$  vérifiant  $\hat{\mathcal{H}}\psi_n = E_n\psi_n$  sachant qu'on connaît les couples  $(E_n^0, \psi_n^0)$  solutions de  $\hat{\mathcal{H}}^0\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^0$  (on suppose que le problème connu n'est pas dégénéré). L'indice  $n$  représente l'ensemble des solutions du problème. On va ainsi chercher les couples  $(E_n^i, \psi_n^i)$  (où  $i$  est l'ordre de perturbation) tels que :

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + E_n^1 + E_n^2 + \dots \\ \psi_n &= \psi_n^0 + \psi_n^1 + \psi_n^2 + \dots \end{aligned}$$

Soit  $\hat{W} = \hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{H}}^0$  la perturbation. On écrit ensuite  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}^0 + \lambda\hat{W}$ , où  $\lambda$  est un paramètre de couplage qui nous permettra d'ordonner les calculs. On pose ensuite :

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots \\ \psi_n &= \psi_n^0 + \lambda \psi_n^1 + \lambda^2 \psi_n^2 + \dots \end{aligned}$$

On pourra prendre  $\lambda = 1$  à la fin. On injecte cette écriture dans  $\hat{\mathcal{H}}\psi_n = E_n\psi_n$  :

$$\left(\hat{\mathcal{H}}^0 + \lambda\hat{W}\right) (\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \dots) = (E_n^0 + \lambda E_n^1 + \lambda^2 E_n^2 + \dots) (\psi_n^0 + \lambda\psi_n^1 + \lambda^2\psi_n^2 + \dots)$$

qu'on ré-ordonne :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\hat{\mathcal{H}}^0\psi_n^0 - E_n^0\psi_n^0\right) + \lambda \left(\hat{\mathcal{H}}^0\psi_n^1 + \hat{W}\psi_n^0 - E_n^0\psi_n^1 - E_n^1\psi_n^0\right) \\ &\quad + \lambda^2 \left(\hat{\mathcal{H}}^0\psi_n^2 + \hat{W}\psi_n^1 - E_n^0\psi_n^2 - E_n^1\psi_n^1 - E_n^2\psi_n^0\right) + \dots \end{aligned}$$

À l'ordre 0 (terme en  $\lambda^0$ ), on retrouve l'équation connue  $\hat{\mathcal{H}}^0\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^0$ . À l'ordre 1, on trouve :

$$\hat{\mathcal{H}}^0\psi_n^1 + \hat{W}\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^1 + E_n^1\psi_n^0$$

Comme l'ensemble des vecteurs propres d'un opérateur forme une base orthonormée de l'espace, on peut développer  $\psi_n^1$  sur la base des  $\psi_i^0$  :  $\psi_n^1 = \sum_i c_i \psi_i^0$ . D'où :

$$\hat{\mathcal{H}}^0 \left( \sum_i c_i \psi_i^0 \right) + \hat{W} \psi_n^0 = E_n^0 \left( \sum_i c_i \psi_i^0 \right) + E_n^1 \psi_n^0$$

On passe en notation bra-ket et on projette à gauche sur  $\langle \psi_n^0 |$  en utilisant la linéarité :

$$\sum_i c_i \langle \psi_n^0 | \hat{\mathcal{H}}^0 | \psi_i^0 \rangle + \langle \psi_n^0 | \hat{W} | \psi_n^0 \rangle = E_n^0 \left( \sum_i c_i \langle \psi_n^0 | \psi_i^0 \rangle \right) + E_n^1 \langle \psi_n^0 | \psi_n^0 \rangle$$

Dans le premier terme de gauche, le terme vaut :  $\langle \psi_n^0 | \hat{\mathcal{H}}^0 | \psi_i^0 \rangle = \langle \psi_n^0 | E_i^0 | \psi_i^0 \rangle = E_i^0 \langle \psi_n^0 | \psi_i^0 \rangle$ . Or la base des  $\{\psi_i^0\}$  est orthonormée, on a donc :  $\langle \psi_n^0 | \psi_i^0 \rangle = \delta_{i,n}$ . Donc dans la somme sur  $i$ , seul le terme en  $i = n$  n'est pas nul. Il en est de même pour le premier terme de droite. D'où :

$$c_n E_n^0 + \langle \psi_n^0 | \hat{W} | \psi_n^0 \rangle = c_n E_n^0 + E_n^1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_n^1 = \langle \psi_n^0 | \hat{W} | \psi_n^0 \rangle}$$

Cette expression très simple est à retenir : la correction en énergie à l'ordre 1 ne dépend que du problème connu et de l'opérateur perturbation. En général, on n'utilise la correction à l'ordre 2 que quand celle à l'ordre 1 est identiquement nulle. Vous pouvez cependant vous entraîner à retrouver la valeur de la correction en énergie à l'ordre 2 en procédant de la même façon (projection de l'équation au second ordre) :

$$E_n^2 = \sum_{i \neq n} \frac{\langle \psi_i^0 | \hat{W} | \psi_n^0 \rangle \langle \psi_n^0 | \hat{W} | \psi_i^0 \rangle}{E_i^0 - E_n^0} = \sum_{i \neq n} \frac{W_{in} W_{ni}}{E_i^0 - E_n^0} = \sum_{i \neq n} \frac{|W_{ni}|^2}{E_i^0 - E_n^0}$$

Si au lieu de projeter sur  $\langle \psi_n^0 |$  comme on l'a fait pour l'énergie, on projette sur  $\langle \psi_m^0 |$  ( $m \neq n$ ), on trouve de la même façon :

$$c_m E_m^0 + \langle \psi_m^0 | \hat{W} | \psi_n^0 \rangle = c_m E_n^0 \quad \Rightarrow \quad c_m = \frac{\langle \psi_m^0 | \hat{W} | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \quad \Rightarrow \quad \psi_n^1 = \sum_{i \neq n} \frac{\langle \psi_i^0 | \hat{W} | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_i^0} \psi_i^0$$

Ce qu'il faut retenir de tout ça, c'est surtout l'énergie de perturbation au premier ordre, et la méthode pour retrouver les autres expressions. Les retenir par cœur ne présente que peu d'intérêts. De plus, je tiens à rappeler que ce que nous avons fait est valable pour un problème connu non dégénéré ; dans le cas dégénéré, je vous renvoie à la littérature (Leforestier p157 par exemple).

La méthode des perturbations possède un inconvénient majeur : il faut déterminer un hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}^0$  de référence et le résoudre. Elle est cependant parfaitement dans l'esprit de l'agrégation : on travaille sur un problème qu'on résout, puis on étudie une petite perturbation de ce problème (trouver les orbitales moléculaires de la pyridine à partir de celles du benzène par exemple) ; c'est pourquoi il faut bien connaître son esprit.

## 2.2 Approche variationnelle

Une autre méthode (qui se prête plus aux calculs sur ordinateur) consiste à partir d'une fonction d'essai  $\psi(\lambda)$  qui contient des paramètres  $\lambda_i$  : ces paramètres sont assimilables à des degrés de libertés. On peut démontrer (Leforestier p167 par exemple) que pour toute fonction  $\phi$  décrivant un système :  $\langle \phi | \hat{\mathcal{H}} | \phi \rangle \geq E_{\text{fondamentale}}$  (il y a égalité quand  $\phi$  est la fonction propre associée à  $E_{\text{fondamentale}}$ ).

On va donc développer l'énergie associée à la fonction d'essai  $\psi(\lambda)$  selon des paramètres  $\lambda_i$ , puis chercher les valeurs qui minimisent l'énergie pour se rapprocher de l'énergie de l'état fondamental. Cette énergie vaut :

$$E(\lambda) = \frac{\langle \psi(\lambda) | \hat{\mathcal{H}} | \psi(\lambda) \rangle}{\langle \psi(\lambda) | \psi(\lambda) \rangle}$$

On cherche donc les valeurs des  $\lambda_i$  qui vérifient  $\partial E / \partial \lambda_i = 0$  puis on re-injecte ces valeurs des  $\lambda_i$  dans  $\psi(\lambda)$ .

Je ne détaillerai pas plus cette méthode puisque nous en verrons un exemple par la suite lors de la construction des orbitales moléculaires (Partie 7.1.8). C'est une méthode très efficace si on part d'une bonne fonction d'essai, en général plus efficace que la méthode perturbative. À nouveau si vous voulez en savoir plus, je vous renvoie vers la littérature.

### 3 Le problème monoélectronique

#### 3.1 Équation de Schrödinger monoélectronique

On considère un noyau autour duquel gravite un seul électron ce qui est le cas de l'atome d'hydrogène et des hydrogénoïdes<sup>2</sup> (et on considère les particules comme ponctuelles). C'est le seul cas où l'équation de Schrödinger est soluble analytiquement, c'est pourquoi on reviendra souvent à ce cas-là.

On a un problème à 2 corps donc on peut se placer dans le référentiel du centre de masse et étudier le mouvement d'une particule de masse  $\mu = \frac{m_e M}{m_e + M}$  (on note  $m_e \approx 9,11 * 10^{-31} kg$  la masse de l'électron et  $M$  la masse du noyau). Comme  $M_H = 1836 m_e$  pour l'hydrogène, on peut considérer que  $\mu = m_e$ . On a donc un électron situé à une distance  $r$  du noyau (considéré comme immobile et au centre de gravité de l'atome). L'électron ressent une force électrostatique dû au noyau et une force gravitationnelle, mais on néglige cette dernière (rapport de  $10^{39}$  entre les deux). Pour écrire le hamiltonien, on écrit l'énergie électrostatique en faisant intervenir la distance électron-noyau  $r$ , et par le principe de correspondance on peut écrire pour un hydrogénoïde :

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En le re-écrivant en coordonnées sphériques, on trouve l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi$$

Pour simplifier, on pose alors :

$$\Lambda = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

L'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \Lambda \psi \right] - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi$$

On va alors faire une séparation de variables, pour résoudre d'un côté ce qui dépend de  $r$  et de l'autre ce qui dépend de  $\theta$  et  $\phi$ . On écrit donc :

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

Les fonctions  $R$  s'appellent les *fonctions radiales* et ne dépendent que de  $r$ , et les fonctions  $Y$  sont les *fonctions angulaires* ou *harmoniques sphériques* et dépendent de  $\theta$  et  $\phi$ . L'opérateur  $\Lambda$  est proportionnel à l'opérateur  $L^2$  associé au carré du moment cinétique  $\vec{L}$ , et on peut montrer que les valeurs propres de  $\Lambda$  s'écrivent  $l(l+1)$  où  $l$  est un entier positif. Les fonctions  $R$  et  $Y$  vérifient alors les équations suivantes :

$$\Lambda Y + l(l+1)Y = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E \right] R = 0$$

2. On appelle hydrogénoïde un noyau autour duquel ne gravite qu'un seul électron.

## 3.2 Formes des solutions

Il y a un nombre infini de solutions à ces équations. En effet, les fonctions radiales solutions de l'équation ont pour forme "polynôme en  $r$  \* exponentielle en  $r^{-1}$ ", et il y a un nombre infini de polynômes possibles. Les harmoniques sphériques ont elles pour formes "polynôme en  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  \* exponentielle en  $\phi$ ". Les différentes solutions de l'équation décrivent des états qui n'ont pas la même énergie, et certaines solutions sont donc plus importantes que d'autres (celles avec une énergie basse).

Au cours de la résolution de l'équation de Schrödinger, trois paramètres apparaissent et on les note  $n$ ,  $l$  et  $m$  :  $n$  est lié au degré du polynôme en  $r$  et  $l$  est lié au degré du polynôme en  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$ . Les fonctions  $R$  ont ainsi pour paramètres  $n$  et  $l$ , alors que les fonctions  $Y$  ont pour paramètres  $l$  et  $m$ . On peut donc écrire les solutions de l'équation de Schrödinger sous la forme (le  $m$  est indiqué en exposant de  $Y$  mais ce n'est pas une puissance de  $Y$ ) :

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$$

Les paramètres qui apparaissent dans la résolution sont appelés *nombres quantiques* et sont tous des entiers :

- $n$  est le nombre quantique principal et vérifie  $n \geq 1$ . Il détermine la couche quantique et il quantifie l'énergie de l'électron (s'il n'y a qu'un seul électron) ainsi que la distance moyenne au noyau. Les couches K/L/M dont on parle parfois correspondent aux électrons  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ .
- $l$  est le nombre quantique secondaire (ou azimutale) et vérifie  $0 \leq l \leq n - 1$ . Il détermine la sous-couche, et quantifie la norme du moment cinétique de l'électron :  $||\vec{L}|| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$  (cf Figure 3).
- $m$  (aussi noté  $m_l$ ) est le nombre quantique magnétique et vérifie  $-l \leq m \leq l$ . Expérimentalement, on ne peut connaître en même temps que la norme de  $\vec{L}$  et 1 de ses composantes, et par convention on regarde la projection selon l'axe  $z$  qui ne peut pas prendre n'importe quelle valeur :  $L_z = m * \hbar$ .

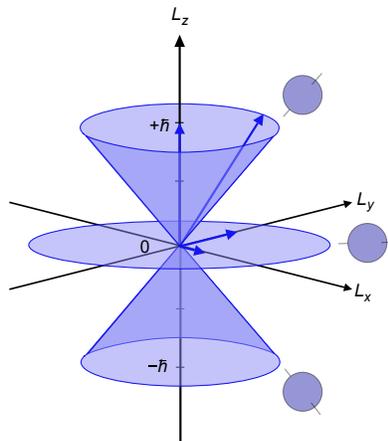


FIGURE 3 – Représentation du moment cinétique de l'électron et de sa projection dans le cas où  $l = 1$  et donc  $m_l = -1/0/1$  : le vecteur  $\vec{L}$  peut soit appartenir à un des cônes de révolution autour de  $Oz$  soit être dans le plan  $Oxy$  (© Wikipedia).

$m_l$  permet de décrire le comportement de l'électron en présence d'un champ magnétique  $\vec{B}$  (d'où son nom). Puisque l'électron a un moment cinétique  $\vec{L}$ , il a aussi un moment magnétique  $\vec{M} = \gamma \vec{L}$  où  $\gamma = -e/(2m_e)$  est le rapport gyromagnétique. Si un électron est soumis à un champ magnétique orienté selon l'axe  $Oz$ , son énergie est modifiée d'une valeur  $\Delta E$  qui est proportionnel à  $m_l$  (effet Zeeman) :

$$\Delta E = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\gamma * L_z * B = -\gamma * m_l * \hbar * B$$

Je ne détaillerai pas les calculs qui mènent à la résolution de l'équation de Schrödinger monoélectronique (cf Leforestier p112 ou Rivail p27). On trouve au final qu'on peut écrire les fonctions radiales et les harmoniques sphériques sous la forme :

$$R_{n,l}(r) = P_{n,l}(r) e^{-\frac{Zr}{na_0}}$$

$$Y_l^m(\theta, \phi) = Q_l^m(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$$

$P_{n,l}(r)$  est un polynôme (dit de Laguerre) de degré  $n - 1$  et  $Q_l^m(\theta)$  est un polynôme (dit de Legendre) en  $\cos(\theta)$  et  $\sin(\theta)$  de degré global  $l$ . La partie radiale est de symétrie sphérique et contrôle donc la distance moyenne de l'électron au noyau ; celle-ci augmente avec  $n$  et on parle alors de fonctions diffuses (par opposition aux fonctions contractées). Les harmoniques sphériques sont quant à elles anisotropes. On donne ci-dessous les expressions mathématiques de certaines fonctions radiales (Tableau 1). Il ne faut pas les connaître par cœur bien sûr, elles sont données pour que ce soit clair que les représentations des orbitales viennent de quelque part.

| n | l | $P_{n,l}(r)$   | l | m       | $Q_l^m(\theta)$                                   |
|---|---|--|---|---------|---|
| 1 | 0 | $2 \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$   | 0 | 0       | $\frac{1}{\sqrt{2}}$                              |
| 2 | 0 | $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right)$                           | 1 | 0       | $\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta$                  |
|   | 1 | $\frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0}$  |   | $\pm 1$ | $\mp \sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta$              |
| 3 | 0 | $\frac{1}{9\sqrt{3}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(6 - \frac{4Zr}{a_0} + \frac{4Z^2r^2}{9a_0^2}\right)$ | 2 | 0       | $\sqrt{\frac{5}{8}} (3 \cos^2 \theta - 1)$        |
|   | 1 | $\frac{1}{9\sqrt{6}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{2Zr}{3a_0} \left(4 - \frac{2Zr}{3a_0}\right)$        |   | $\pm 1$ | $\mp \sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta$ |
|   | 2 | $\frac{1}{9\sqrt{30}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{4Z^2r^2}{9a_0^2}\right)$                      |   | $\pm 2$ | $\sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta$              |

TABLE 1 – Expressions mathématiques de certaines fonctions radiales et certaines harmoniques sphériques d'un hydrogénoïde. Le paramètre  $a_0$  sera décrit plus tard.

À  $n$  constant on parle de *couche*, à  $n$  et  $l$  constant on parle de *sous-couche*. On note en général  $\psi_{n,l,m}$  sous la forme  $|nlm\rangle$  ou  $nl_m$  et on appelle la fonction une *orbitale atomique*. Une orbitale atomique est donc une *fonction d'onde monoélectronique solution d'une équation de Schrödinger représentant l'état d'un électron*. Historiquement, on décrit  $l$  avec une lettre et non un chiffre, avec la correspondance suivante :  $l = 0 \Leftrightarrow s$ ,  $l = 1 \Leftrightarrow p$ ,  $l = 2 \Leftrightarrow d$ ,  $l = 3 \Leftrightarrow f$ ,  $l = 4 \Leftrightarrow g$ . Après  $f$  et  $g$  on suit l'ordre alphabétique. Cette habitude vient de la spectroscopie et de la forme des raies, les lettres venant des termes : sharp, principe, diffuse, fundamental. On a donc  $\psi_{100} = |100\rangle = 1s_0$  (les  $ns_0$  sont notées  $ns$  car seule une valeur de  $m$  est possible),  $\psi_{21-1} = |21-1\rangle = 2p_{-1}$  ou encore  $\psi_{322} = |322\rangle = 3d_2$ .

### 3.3 Représentation des solutions

Les solutions de l'équation de Schrödinger sont des fonctions de l'espace en 3D, ce qui n'est pas facile à représenter sur un plan en 2D. De plus, on rappelle que les fonctions radiales ne dépendent que de  $r$  et ont donc la même valeur quelque soit la direction autour de l'origine du repère (qu'on place sur le noyau de l'hydrogène). Pour représenter les orbitales atomiques, on dessine l'enveloppe d'une surface liée aux harmoniques sphériques à l'intérieure de laquelle la probabilité de trouver l'électron est de 95%. Cela pourrait être 90% ou 99%, ça ne changerait rien à la forme dessinée et cela changerait seulement la taille du dessin. On représente aussi le signe de la fonction d'onde en différenciant les zones positives des zones négatives. Le signe de la fonction n'est pas important, mais sa variation l'est ; on se contente donc en général de griser l'une des deux zones ou de les représenter de différentes couleurs. On présente Figure 4 le nuage de probabilité de présence de différentes orbitales projeté sur un plan ainsi que les isosurfaces à 90% (i.e. les surfaces à l'intérieur desquelles la probabilité de trouver l'électron est de 90%) ; ces images sont issues du site The Orbitron de Mark Winter. On appelle souvent orbitale cette représentation, mais il ne faut pas oublier que par définition une orbitale est une fonction mathématique. On présente Tableau 5 les formes de certaines orbitales atomiques de  $1s$  à  $4f$ . On appelle *surface nodale* une surface où la fonction d'onde s'annule et change de signe en la traversant (cas des orbitales  $2p$  par exemple).

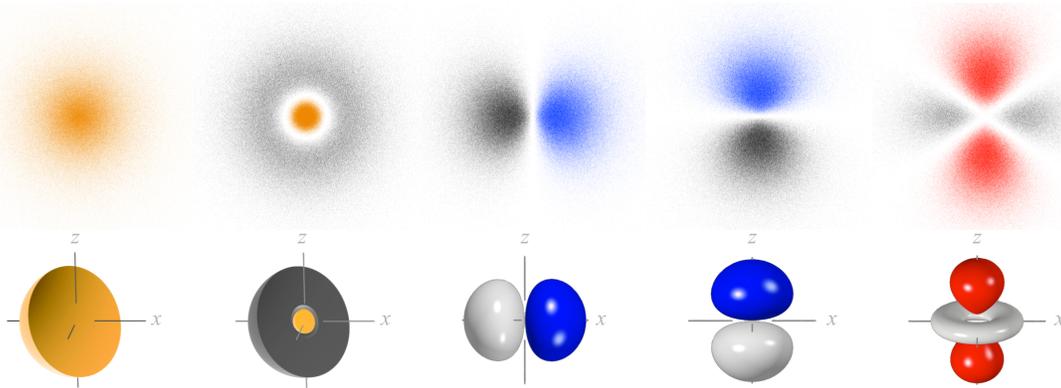


FIGURE 4 – Probabilité de présence de l'électron et isosurfaces pour les orbitales  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p_x$ ,  $2p_z$  et  $3d_{z^2}$  (©The Orbitron de Mark Winter).

La densité de probabilité de présence d'un électron à la distance  $r$  du noyau vaut :

$$\begin{aligned} dP &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |R_{n,l}(r)|^2 |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 r^2 dr \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ &= |R_{n,l}(r)|^2 r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Les harmoniques sphériques sont normées : si on regarde dans toutes les directions en même temps, on "voit" l'électron. Donc la double intégrale sur  $\theta$  et  $\varphi$  dans l'expression ci-dessus vaut 1, et on a :  $dP = |R_{n,l}(r)|^2 r^2 dr$ . On définit la densité de probabilité radiale par  $D(r) = dP/dr = |R_{n,l}(r)|^2 r^2$ . On trace ces densités Figure 6 pour les orbitales  $1s$ ,  $2s$  et  $3s$  de l'hydrogène (en se servant directement des formules

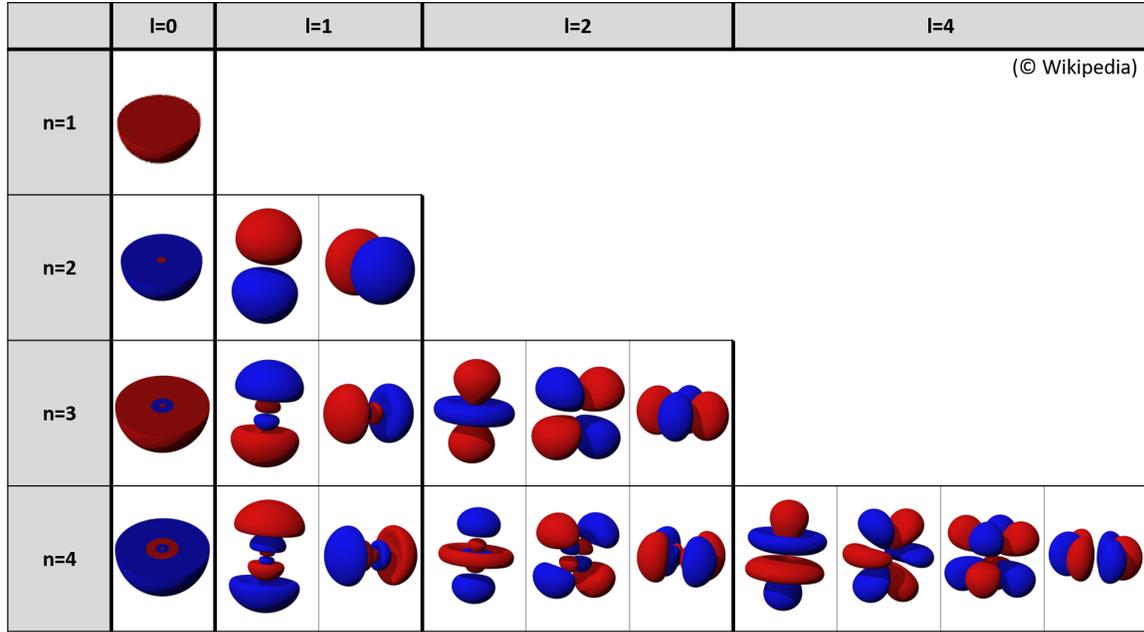
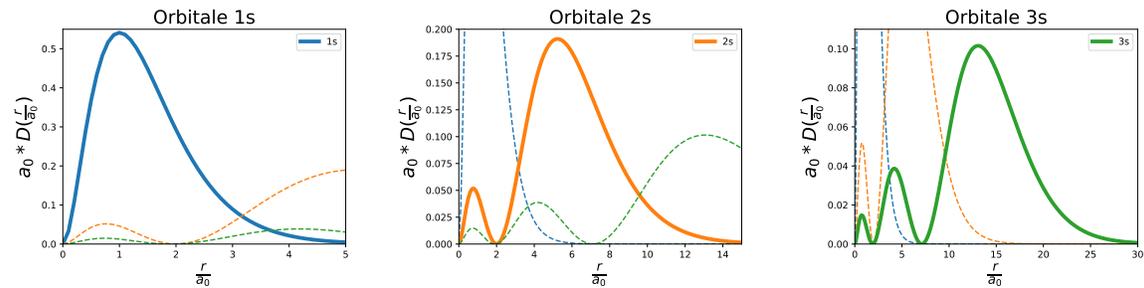


FIGURE 5 – Représentation de certaines orbitales atomiques de 1s à 4f.

FIGURE 6 – Densités de probabilité de présence d'un électron  $ns$  pour l'hydrogène. Sur chaque panel, les densités des trois OA sont représentées pour comparaison.

précédentes). On constate que l'électron peut se trouver partout dans l'espace, mais avec des probabilités plus ou moins grandes. Les orbitales 2s et 3s ont respectivement 1 et 2 nœuds radiaux alors que la 1s n'en a pas. On voit aussi que plus  $n$  augmente, plus l'orbitale est diffuse (ce que nous avons vu). Pour l'orbitale 1s, le maximum de probabilité est en  $r = a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 52,92pm$  qui est une grandeur appelée rayon de Bohr. Entre  $0,9a_0$  et  $1,1a_0$ , la probabilité de présence de l'électron 1s n'est que de 11%, et entre 0 et  $1,337a_0$  l'intégrale vaut 0,5. Cependant, on appelle tout de même rayon de l'orbitale la valeur qui maximise la densité de probabilité, i.e.  $a_0$  pour la 1s.

Il est important de noter que les orbitales  $2p_{-1}$  et  $2p_{+1}$  (entre autres) sont complexes alors que la  $2p_0$  est réelle. Les fonctions qu'on représente sont réelles : les fonctions  $2p_x$  et  $2p_y$  qu'on utilise couramment sont des combinaisons linéaires des fonctions  $2p_{-1}$  et  $2p_{+1}$  ; on les appelle  $2p_x$ ,  $2p_y$  et  $2p_z$  parce qu'écrites en coordonnées sphériques, ces fonctions sont proportionnelles à  $x$ ,  $y$  et  $z$  (on rappelle que  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  et  $z = r \cos \theta$ ).

$$\begin{aligned}
2p_z &= 2p_0 = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{5/2} e^{-\frac{Zr}{2a_0}} * \underbrace{r \cos \theta}_{=z} \\
2p_x &= \frac{2p_1 - 2p_{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{5/2} e^{-\frac{Zr}{2a_0}} * \underbrace{\frac{r}{2} (-\sin \theta e^{i\phi} - \sin \theta e^{-i\phi})}_{=-r \sin \theta \cos \phi = -x} \\
2p_y &= \frac{2p_1 + 2p_{-1}}{i\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{5/2} e^{-\frac{Zr}{2a_0}} * \underbrace{\frac{r}{2i} (-\sin \theta e^{i\phi} + \sin \theta e^{-i\phi})}_{=-r \sin \theta \sin \phi = -y}
\end{aligned}$$

Pour passer des OA  $\{3d_m\}_{m=-2,-1,0,1,2}$  aux OA  $\{3d_{xy}, 3d_{yz}, 3d_{xz}, 3d_{x^2-y^2}, 3d_{2z^2-x^2-y^2}\}$ , il faut là aussi faire des combinaisons linéaires. La notation est la même que pour les orbitales  $2p$  : l'OA  $3d_{2z^2-x^2-y^2}$  est proportionnelle à  $(2z^2 - x^2 - y^2)$  par exemple<sup>3</sup>. À ce propos, cette orbitale est souvent écrite plus simplement sous la forme  $3d_{z^2}$ .

$$\begin{aligned}
3d_{z^2} &= 3d_0 = \frac{1}{81\sqrt{6\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{7/2} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} * \underbrace{r^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}_{3z^2 - r^2 = 2z^2 - x^2 - y^2} \\
3d_{xz} &= \frac{3d_1 - 3d_{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{81\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{7/2} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} * \underbrace{r^2 \sin \theta \cos \theta * (-e^{i\phi} - e^{-i\phi})}_{-2r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi = -2xz} \\
3d_{yz} &= \frac{3d_1 + 3d_{-1}}{i\sqrt{2}} = \frac{1}{81\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{7/2} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} * \underbrace{\frac{1}{i} r^2 \sin \theta \cos \theta * (-e^{i\phi} + e^{-i\phi})}_{-2r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi = -2yz} \\
3d_{xy} &= \frac{3d_2 - 3d_{-2}}{i\sqrt{2}} = \frac{1}{81\sqrt{8\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{7/2} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} * \underbrace{\frac{1}{i} r^2 \sin^2 \theta * (e^{2i\phi} - e^{-2i\phi})}_{4r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi = 4xy} \\
3d_{x^2-y^2} &= \frac{3d_2 + 3d_{-2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{81\sqrt{8\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{7/2} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} * \underbrace{r^2 \sin^2 \theta * (e^{2i\phi} + e^{-2i\phi})}_{2r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = 2(x^2 - y^2)}
\end{aligned}$$

Enfin, il ne faut pas oublier que les OA sont orthogonales entre elles car fonctions propres d'un même hamiltonien (cf Partie 1.3.2) et il est bon de noter que les OA des hydrogénoïdes sont plus contractées que les OA correspondantes de l'atome d'hydrogène car les électrons sont plus attirés par le noyau qui est plus chargé.

### 3.4 Énergies des orbitales

Lorsqu'on résout l'équation de Schrödinger, on trouve comme valeur de l'énergie :

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

On la simplifie en générale en notant :

$$E_n = -Ry \frac{Z^2}{n^2} \quad \text{avec : } Ry = \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} = 13,6 \text{ eV (constante de Rydberg)}$$

3. L'OA  $3d_{xy}$  s'annule en  $x = 0$  ou en  $y = 0$ , on ne peut donc pas se tromper en la dessinant.

L'énergie des hydrogénoïdes ne dépend donc que du nombre quantique principal  $n$  (cf Figure 7). Les trois OA  $2p$  et l'OA  $2s$  sont ainsi dégénérées, de même que les  $3s$ ,  $3p$  et  $3d$  (pour  $n$  donné, on peut montrer qu'on a  $n^2$  fonctions dégénérées). Si  $n = \infty$ , alors l'électron est à une distance infinie du noyau : on est dans un état ionisé.

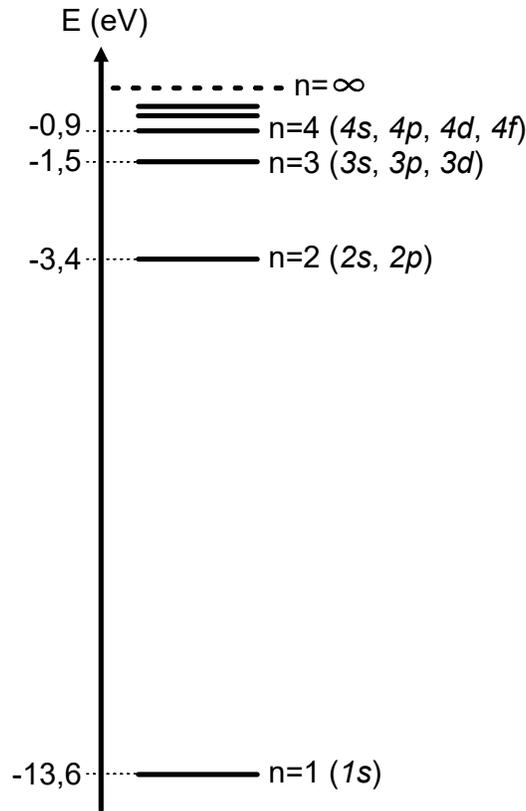


FIGURE 7 – Niveaux énergétiques de l'atome d'hydrogène (à l'échelle).

On appelle *série* un ensemble de raies spectroscopiques qui ont en commun l'état final. L'ensemble des raies qui correspondent aux transitions électroniques entre les états excités  $n \geq 2$  et l'état fondamental  $n = 1$  s'appellent par exemple *série de Lyman*. Les séries ont une grande importance historique, puisque ce sont ces observations qui ont confronté la mécanique classique à ses limites.

### 3.5 Le spin

Jusqu'à présent, nous avons représenté les électrons uniquement par l'orbitale qui les décrit et donc par trois nombres quantiques. Mais expérimentalement, pour la désexcitation d'un électron  $3p$  du sodium vers un niveau  $3s$  (qui produit une lumière jaune intense), on observe deux raies très proches à 589,0 et 589,6nm. Ce dédoublement de raies est la conséquence d'un dédoublement de niveaux d'énergie. Deux électrons émettant des énergies différentes, il doit y avoir une différence entre leurs états (cf Partie 12.9.2). Pour décrire ce comportement, il faut introduire un nombre quantique supplémentaire, mis en évidence par Stern et Gerlach en 1922, appelé spin. C'est une propriété de toutes les particules qui n'a pas d'équivalent classique, bien qu'on l'associe parfois à une boussole quantique. Chaque particule a une valeur de spin, et pour l'électron  $S=1/2$  (on n'écrit pas 0,5).

Le moment cinétique de spin  $\vec{S}$  a les mêmes propriétés que le moment cinétique orbitale  $\vec{L}$ , à savoir que sa norme et sa projection sur un axe sont quantifiées :  $\|\vec{S}\| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$  et  $S_z = m_s\hbar$ . C'est un moment magnétique qui va être sensible aux champs magnétiques (cf expériences de RMN et d'IRM). De manière équivalente au moment cinétique orbitale, on a :  $-S \leq m_s \leq S$  (par pas de 1). Le spin de l'électron valant  $S = 1/2$ , on a donc  $m_s = \pm 1/2$ . On appelle électron  $\alpha$  un électron ayant  $m_s = +1/2$  (représenté par une flèche vers le haut  $\uparrow$ ) et électron  $\beta$  un électron ayant  $m_s = -1/2$  (représenté par une flèche vers le bas  $\downarrow$ ). Si on veut décrire complètement de façon mathématique un électron, on utilise une *spin-orbitale* : c'est une fonction mathématique du type  $\chi_{\alpha_i}\sigma_i$  où  $\chi_{\alpha_i}$  est l'orbitale et  $\sigma_i$  la fonction de spin ( $\alpha$  ou  $\beta$ ) ( $1s\alpha$  par exemple ou  $2p_x\beta$ ).

### 3.6 Unités atomiques

Regarder des problèmes au niveau microscopique implique l'utilisation de grandeurs loin de l'unité (grandes puissances de 10). De plus, beaucoup de ces grandeurs interviennent, et on aimerait bien simplifier les écritures. Un système d'unités propre aux problèmes microscopiques a donc été mis au point, appelé *système d'unités atomiques*. Dans ce système :

- l'unité de longueur vaut  $a_0 = 52,9 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ , rayon de Bohr ;
- l'unité de masse vaut  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , la masse de l'électron ;
- l'unité de charge vaut  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , la charge de l'électron ;
- l'unité de moment angulaire vaut  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.S.rad}^{-1}$  ;
- l'unité d'énergie s'appelle *Hartree* et vaut  $1H = 2Ry = 27,2 \text{ eV} = 4,36 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ .

Toutes ces grandeurs valent donc 1 dans ce système d'unités. Ces relations impliquent que dans ce système d'unités on a aussi :  $4\pi\epsilon_0 = 1$ . Passer du système classique aux unités atomiques est assez facile, il suffit de prendre les constantes égales à 1, mais le faire dans l'autre sens l'est moins...

## 4 Les atomes polyélectroniques

### 4.1 Position du problème

Considérons un atome de numéro atomique  $Z$  ayant  $n$  électrons. On considère à nouveau que le noyau est au centre de gravité du système et qu'il est donc immobile. L'énergie du système est la somme de l'énergie cinétique des électrons, de l'énergie potentielle électrostatique noyau-électron et de l'énergie potentielle électrostatique électron-électron. Le hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}$  s'écrit donc en unités atomiques et avec les notations classiques :

$$\hat{\mathcal{H}} = \underbrace{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2}_{\hat{T}_{elec}} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{Z}{r_i}}_{\hat{V}_{Ze}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{1}{r_{ij}}}_{\hat{V}_{ee}} = \sum_{i=1}^n \left( -\frac{1}{2} \nabla_i^2 - \frac{Z}{r_i} + \sum_{j>i}^n \frac{1}{r_{ij}} \right)$$

où  $\hat{T}_{elec}$ ,  $\hat{V}_{Ze}$  et  $\hat{V}_{ee}$  représentent les trois termes d'énergie décrits ci-dessus. On rencontre souvent des erreurs sur le signe à mettre devant ces termes : on met un signe  $-$  pour tout ce qui va stabiliser le système (plus l'énergie est basse, plus le système est stable) et un signe  $+$  pour tout ce qui va le déstabiliser. En particulier, plus l'énergie cinétique des électrons est élevée, moins le système est stable et on rappelle (cf Partie 1.3.3) que l'énergie cinétique vaut  $-\frac{1}{2} \nabla_i^2$ . Il faut donc écrire  $+\left(-\frac{1}{2} \nabla_i^2\right)$ .

Dès qu'on a deux électrons (ou plus) dans le système, on ne peut plus résoudre l'équation de Schrödinger de manière exacte. Le terme d'interaction inter-électronique  $V_{ee}$ <sup>4</sup> impose en effet la non-séparabilité des variables. Dès 2 électrons, les solutions ne peuvent donc être que approchées.

### 4.2 Hamiltoniens effectifs

On connaît les solutions avec des hamiltoniens monoélectroniques, on va donc essayer de s'y rapporter. On écrit :

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n \hat{h}_i \quad \text{avec} \quad \hat{h}_i = -\frac{1}{2} \nabla_i^2 - \frac{Z}{r_i} + \sum_{j>i}^n \frac{1}{r_{ij}}$$

Le terme en  $\frac{1}{r_{ij}}$  représente le potentiel ressenti par l'électron  $i$  dû aux autres électrons. On va se placer dans le cadre d'une approximation dite *de champ moyen* (ou *des électrons indépendants*) : on considère que chaque électron est placé dans un potentiel moyen ( $V_i^{effectif}$ ) dû au noyau de charge  $+Ze$  et aux  $n-1$  autres électrons :

$$\hat{h}_i = -\frac{1}{2} \nabla_i^2 + V_i^{effectif}$$

L'approximation qui consiste à écrire le hamiltonien comme une somme de hamiltoniens monoélectroniques implique mathématiquement que :

$$\psi(1, \dots, n) = \chi_\alpha(1) \dots \chi_\omega(n) \quad \text{et} \quad E = \sum_i \varepsilon_{\alpha_i}$$

4. On écrit parfois  $V_{ee}$  sous la forme :  $V_{ee} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{r_{ij}}$ , le terme  $\frac{1}{2}$  permettant d'éviter le double-comptage des termes.

avec  $\hat{h}_i \chi_{\alpha_i} = \varepsilon_{\alpha_i} \chi_{\alpha_i}$  :  $\varepsilon_{\alpha_i}$  est donc la valeur propre associée à  $\chi_{\alpha_i}$  (les lettres grecques représentent les fonctions et les chiffres de 1 à  $n$  les électrons). Les fonctions  $\chi_{\alpha_i}$  sont des fonctions d'onde monoélectroniques appelées elles aussi orbitales atomiques (OA) : elles décrivent un électron dans un atome polyélectronique. Les OA des atomes polyélectroniques dépendent elles aussi de nombres quantiques  $n$ ,  $l$  et  $m$  qui obéissent aux mêmes règles que pour les hydrogénoïdes, et elles s'écrivent de manières semblables à celles des hydrogénoïdes :

$$\chi_{\alpha_i} = \chi_{n_i, l_i, m_i} = R_{n_i, l_i}(r) Y_{l_i}^{m_i}(\theta, \phi)$$

Les harmoniques sphériques  $Y_{l_i}^{m_i}$  sont les mêmes que pour l'hydrogène. La représentation des orbitales sera donc la même. Les parties radiales sont quant à elles adaptées à partir de celles des hydrogénoïdes. La conclusion de ce paragraphe est la suivante : *les électrons d'un atome poly-électronique pourront être décrits par des orbitales atomiques qui se dessinent de la même façon que les orbitales de l'atome d'hydrogène.*

Une des façons de regarder  $V_i^{effectif}$  est de considérer que ce potentiel vient d'un potentiel coulombien dû à un noyau fictif de charge  $+Z^*e$  résultant de l'écrantage du noyau par les autres électrons (cf modèle de Slater, Partie 4.6). Il existe d'autres façons de résoudre le problème, comme les méthodes auto-cohérentes (cf Partie 11) ou encore écrire (si  $N=2$ )  $\hat{\mathcal{H}} = h(1) + h(2) + 1/r_{12}$  et le traiter en perturbation.

*Note de vocabulaire* : on parle d'*approximation orbitale* (ou *approximation orbitale*) pour dire qu'on écrit  $\psi(1, \dots, n) = \chi_{\alpha}(1) \dots \chi_{\omega}(n)$  ; on voit ici que dans le cas des atomes polyélectroniques, la vraie approximation est celle de faire une somme d'opérateurs monoélectroniques et est donc l'approximation de champ moyen.

### 4.3 Électrons de cœur et électrons de valence

On appelle en général *électrons de valence* les électrons de plus grand nombre quantique principal et ceux des sous-couches non saturées. Ce sont donc les électrons les plus externes de l'atome, et ce sont ceux qui interviendront dans les réactions chimiques (formation de liaison par exemple). On appelle *électrons de cœur* les électrons qui ne sont pas des électrons de valence.

### 4.4 Énergie

Pour les hydrogénoïdes, nous avons vu que les orbitales ont des niveaux d'énergie qui ne dépendent que de  $n$ . Dans l'état fondamental, l'unique électron se place alors dans l'orbitale de plus basse énergie. Dans le cas des atomes polyélectroniques, l'énergie dépend aussi de  $l$ , mais on ne peut pas exprimer  $E(n, l)$  de manière aussi simple que pour les hydrogénoïdes. De manière générale, on peut dire que :

1. à  $l$  constant,  $E(n, l)$  augmente avec  $n$  :  $E(1s) < E(2s) < E(3s) \dots$
2. à  $n$  constant,  $E(n, l)$  augmente avec  $l$  :  $E(3s) < E(3p) < E(3d)$

Il y a donc une levée de dégénérescence (les  $2s$  et  $2p$  étaient dégénérées pour H par exemple et ne le seront plus ici). Mais ces règles ne suffisent pas, puisqu'on ne peut pas comparer ainsi  $E(2p)$  avec  $E(3s)$ .

## 4.5 Atomistique

On cherche à savoir où se placent les électrons quand il y en a plusieurs, i.e. à trouver la configuration électronique fondamentale d'un atome. On commence par chercher la répartition dans les sous-couches car les orbitales d'une sous-couche sont dégénérées ( $2p_x$ ,  $2p_y$  et  $2p_z$  par exemple). Certaines règles empiriques nous permettront ensuite de placer les électrons dans les orbitales. Une assez grande liberté est en général prise dans le vocabulaire, à savoir qu'on s'autorise à parler "d'électron  $2p$ ", ou dire que "l'électron est dans l'orbitale  $3d$ " ou encore que "la sous-couche contient cinq électrons"...

### 4.5.1 Principe d'exclusion de Pauli

Dans un même système, deux électrons diffèrent forcément par au moins un nombre quantique (on rappelle que les électrons sont décrits par quatre nombres quantiques)<sup>5</sup>. Une orbitale est définie par  $n$ ,  $l$  et  $m$ ; une orbitale peut donc être occupée par deux électrons, à savoir un électron  $\alpha$  et un  $\beta$ . Deux électrons de même spin ne peuvent donc pas être dans la même orbitale. Une sous-couche  $s$  ( $l = 0$ ) ne contient qu'une orbitale ( $m = 0$ ) et ne peut donc contenir que deux électrons. Une sous-couche  $p$  ( $l = 1$ ) contient trois orbitales ( $m = -1/0/1$ ) et peut donc contenir six électrons. Une sous-couche  $d$  ( $l = 2$ ) peut en contenir 10 et une sous-couche  $f$  ( $l = 3$ ) peut en contenir 14.

### 4.5.2 Règle de Klechkowski

Même si les niveaux énergétiques sont souvent accessibles expérimentalement (grâce à la spectroscopie), il n'est pas raisonnable d'essayer de tabuler les niveaux pour tous les éléments. On utilise donc une règle empirique qui nous donne l'ordre de remplissage des sous-couches pour l'état fondamental : *les sous-couches se remplissent par valeurs de  $n + l$  croissantes ; à  $n + l$  constant, on remplit en premier la sous-couche de plus petit  $n$* . D'où l'ordre :

$$1s < 2s < 2p < 3s < 3p < 4s < 3d < 4p < 5s \dots$$

On se sert en général d'un tableau comme celui représenté Figure 8 pour se rappeler cet ordre. Chaque ligne correspond à une valeur de  $n$  et chaque colonne correspond à une valeur de  $l$ . On constate que le long des diagonales dessinées en rouge à droite, les valeurs de  $n + l$  sont toujours les mêmes. De plus, la première orbitale qu'une flèche rouge croise est celle de plus petite valeur de  $n$  (à  $n + l$  fixe). On remplit donc les sous-couches en suivant les diagonales, de en haut à droite vers en bas à gauche.

Pour le carbone ( $Z=6$ ), en suivant cette règle on va mettre deux électrons dans la sous-couche  $1s$  (on ne peut pas en mettre plus), deux dans la  $2s$  et ceux qui restent (deux) dans la  $2p$ . On note en exposant le nombre d'électrons dans une sous-couche : pour dire qu'on met 2 électrons dans une  $1s$ , on note donc  $1s^2$ , on le lit "1s deux" mais cela signifie que la fonction d'onde est faite d'un produit de deux  $1s$ . La configuration électronique fondamentale du carbone est donc :  $1s^2 2s^2 2p^2$ . Pour le fer ( $Z = 26$ ), la configuration électronique est  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$  (savoir la retrouver!).

5. Ce principe, proposé en 1925, s'applique de manière plus générale aux fermions et peut aussi s'énoncer en disant que deux électrons ne peuvent occuper la même spin-orbitale.

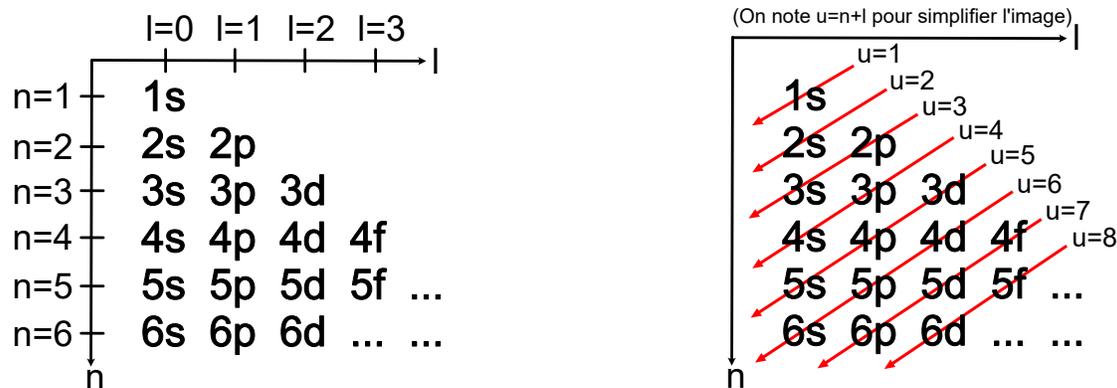


FIGURE 8 – Utilisation de la règle de Klechkowski.

On peut noter que la structure de la classification périodique est intimement liée à cet ordre de remplissage : on peut trouver une configuration électronique fondamentale juste en regardant la classification <sup>6</sup>. Il est fréquent d'omettre dans l'écriture d'une configuration les électrons des premières sous-couches en indiquant le nom du gaz rare précédant l'atome considéré. Ainsi pour le fer on pourra écrire  $[Ar] 4s^2 3d^6$  :  $[Ar]$  signifie qu'on a pour les électrons de cœur la configuration électronique fondamentale de l'argon. Il y a quelques exceptions à cette règle de remplissage, en particulier le chrome, le cuivre ou l'argent, qu'on peut expliquer avec la règle de Hund.

#### 4.5.3 Règle de Hund

Revenons sur le cas du carbone. Il y a deux électrons dans la sous-couche  $2p$  qui peut en contenir six. On peut donc mettre ces électrons de différentes façons : les deux électrons dans une même orbitale avec des spins opposés, les deux électrons dans deux orbitales avec des spins parallèles, ou les deux électrons dans deux orbitales avec des spins opposés (cf Figure 9). La règle de Hund (1925) stipule que *la configuration de spin maximal est la plus stable*, i.e. la configuration (b). La configuration (a) est moins stable en raison de la répulsion électrostatique (deux électrons sur une même orbitale occupent la même région de l'espace). Pour ce qui est de la différence entre les configurations (b) et (c) où les électrons sont dans des régions différentes de l'espace, c'est un phénomène quantique appelé *l'échange* (qui ne s'applique qu'aux électrons de mêmes spins) qui est la raison pour laquelle la configuration (b) est la plus stable.

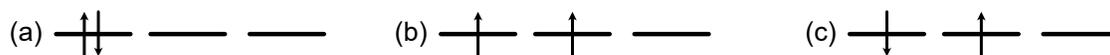


FIGURE 9 – Règle de Hund.

Revenons sur les exceptions évoquées précédemment, telles que le chrome ( $Z=24$ ). La règle de Klechkowski nous donne comme ordre de remplissage pour la configuration électronique fondamentale :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^4$ . Les sous-couches  $4s$  et  $3d$  sont très proches en énergie et un électron peut donc facilement passer de l'une à l'autre. L'apport énergétique apporté par le passage à un spin supérieur dans la

6. Pour des discussions sur la structure de la classification, voir livres de Jean & Volatron.

configuration  $4s^1 3d^5$  est suffisant pour inverser l'ordre énergétique des configurations (il y aura plus d'échange). La configuration électronique fondamentale du chrome est donc  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1 3d^5$ . De manière générale, on utilise pour les exceptions à la règle de Klechkowski une sous-règle qui dit que *des sous-couches remplies ou demi-remplies ont une stabilité particulière* (valable uniquement pour des sous-couches  $p$ ,  $d$  ou  $f$  car c'est l'échange qui stabilise). C'est le cas d'une sous-couche remplie qui explique l'exception du cuivre, et on peut aussi expliquer les configurations du molybdène et l'argent (sous le chrome et le cuivre dans la classification périodique).

*Note de vocabulaire sur le magnétisme* : un élément pour lequel tous les électrons sont appariés (i.e. avec 2 électrons sur chaque OA) n'a pas de spin intrinsèque : il sera *diamagnétique*, c'est-à-dire qu'il n'a pas de moment magnétique permanent en l'absence de champ extérieur, et il génère un champ magnétique opposé au champ extérieur. Un élément pour lequel le spin est non nul aura des propriétés *paramagnétiques*, c'est-à-dire qu'il n'aura toujours pas de moment magnétique permanent en l'absence de champ extérieur, mais sous l'effet du champ magnétique une aimantation apparaît dans le même sens que le champ.

#### 4.5.4 Ions et états excités

Revenons sur le fer ( $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$ ). On peut exciter l'atome de fer pour le faire passer dans un autre état plus haut en énergie : ce sera par exemple le cas si on fait passer un électron  $4s$  dans une orbitale  $3d$  pour obtenir la configuration  $[Ar] 4s^1 3d^7$  qui est son premier état excité.

On peut aussi enlever des électrons au fer pour obtenir les ions  $Fe^{2+}$  et  $Fe^{3+}$  par exemple. La règle est qu'on enlève en premier les électrons de plus grand nombre quantique principale : les  $4s$  dans notre cas ( $n = 4$ ). Attention, c'est une erreur classique : on a rempli la sous-couche  $3d$  en dernier, ce n'est pourtant pas elle qu'on "vide" en premier. La configuration électronique fondamentale de  $Fe^{2+}$  sera alors  $[Ar] 4s^0 3d^6$  (ou  $[Ar] 4s^1 3d^5$  si on utilise la sous-règle précédente) et celle de  $Fe^{3+}$  sera  $[Ar] 4s^0 3d^5$ . Ces configurations sont valables pour les ions seuls en phase gaz, ce qu'on ne rencontre presque jamais : ils sont toujours sous l'influence d'un champ de ligand, ce qui perturbe les niveaux énergétiques des orbitales. On pourrait ne pas noter le  $4s^0$  mais il est bon de le laisser pour bien préciser que ce n'est pas un oubli. Avec la règle de Hund, on voit ici que l'ion  $Fe^{3+}$  aura une stabilité particulière par rapport à  $Fe^{2+}$ , ce qu'on retrouve dans la nature puisque le fer s'oxyde à l'état +III.

## 4.6 Modèle de Slater

### 4.6.1 Orbitales et écrantage

Pour simplifier les calculs, Slater a proposé un modèle (vers 1930) dans lequel la partie radiale des OA ne dépend plus de  $l$  et s'écrit :

$$R_n(r) = N \left( \frac{r}{a_0} \right)^{n^*-1} \exp \left( -\frac{Z^*}{n^*} \frac{r}{a_0} \right)$$

avec  $Z^*$  et  $n^*$  des grandeurs empiriques. Ce modèle prend en compte l'effet des autres électrons en considérant qu'ils forment comme un nuage autour du noyau et diminuent

donc un peu la charge ressentie par l'électron considéré (électron bleu sur la Figure 10) : on appelle cet effet *l'écrantage*. C'est particulièrement vrai pour les électrons de valence qui sont séparés du noyau par les électrons de cœur ou de manière générale pour les électrons  $n$  qui sont plus éloignés du noyau que les électrons  $n - 1$ .

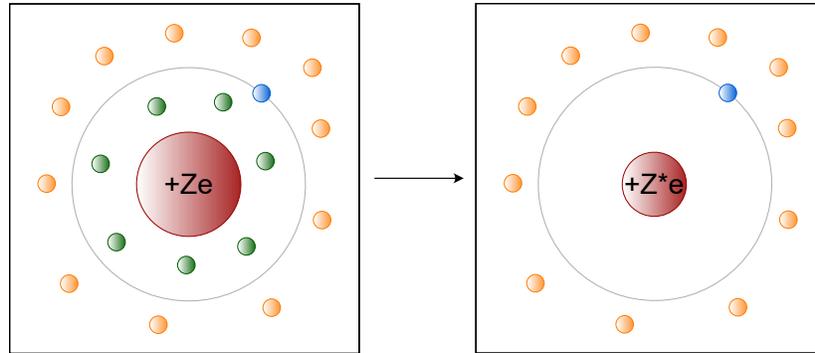


FIGURE 10 – Modèle de Slater.

Slater a donc proposé de considérer que l'électron étudié voit un noyau de charge  $Z^*$  ( $Z^* < Z$ ) avec  $Z^* = Z - \sigma$  où  $\sigma$  est appelé *constante d'écran* et représente l'écrantage du noyau dû aux autres électrons.  $\sigma$  s'écrit  $\sigma = \sum_i \sigma_i$  où chaque  $\sigma_i$  représente l'écrantage dû à l'électron  $i$ . Les  $\sigma_i$  peuvent se calculer à l'aide de règles empiriques qui sont résumées dans le tableau ci-dessous<sup>7</sup> :

|        | $n' < n - 1$ | $n' = n - 1$ | $n' = n$ | $n' > n$ |
|--------|--------------|--------------|----------|----------|
| 1s     |              |              | 0.30     | 0        |
| ns, np | 1            | 0.85         | 0.35     | 0        |
| nd, nf | 1            | 1            | 0.35     | 0        |

On constate que les électrons des OA sont regroupés en familles ( $ns$  avec  $np$ , ou  $nd$  avec  $nf$ ), ce qui n'est pas forcément intuitif. Le modèle initial de Slater a été amélioré par la suite, et on peut rencontrer des cas où les OA ne sont plus regroupées par famille (on rappelle que ces valeurs sont empiriques, donc on peut les modifier pour mieux coller à la réalité).

$n^*$  est ce qu'on appelle le *nombre quantique apparent*. Il n'est pas toujours utilisé, mais permet de se rapprocher des résultats expérimentaux (c'est une deuxième grandeur empirique qu'on peut ajuster). Pour les grandes valeurs de  $n$ , les orbitales ont tendance à se contracter à cause des effets relativistes des électrons (ce qu'on appelle la contraction des lanthanides en est un exemple). À partir de  $n = 4$ , on diminue donc la valeur prise pour le nombre quantique principal, et on utilise  $n^*$ .  $n^*$  se trouve selon  $n$  avec la correspondance :

|       |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| n     | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
| $n^*$ | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 3,7 | 4,0 | 4,2 |

7. Quand on regarde les densités de probabilité radiales, on constate qu'un électron  $2s$  ou  $2p$  (par exemple) peut être plus près du noyau qu'un électron  $1s$ , mais cet effet n'est pas considéré dans le modèle de Slater : les électrons  $3s$  ou  $3p$  n'écranteront pas un électron  $2s$  ou  $2p$ .

Explicitons la procédure pour se servir de ces règles : on fixe un électron d'une OA ( $2s$  par exemple).  $\sigma$  se calcule alors en sommant les contributions  $\sigma_i$  de chacun des autres électrons (attention, une erreur fréquente consiste à compter dans le calcul de la constante d'écran l'électron lui-même : un électron ne s'auto-écranter pas!). Prenons l'exemple du carbone de configuration électronique fondamentale  $1s^2 2s^2 2p^2$ . Les électrons  $1s$  ne sont pas écrantés par les électrons de nombre quantique principale  $n = 2$ ; chaque électron  $1s$  ne "voit" donc qu'un seul autre électron  $1s$  :  $Z_{1s}^* = 6 - 0,30 = 5,70$ . Les électrons  $2s$  et  $2p$  font partie de la même famille et chaque électron de cette famille "voit" 2 électrons  $1s$  et 3 électrons de cette famille  $2s/2p$ , d'où :  $Z_{2s/2p}^* = 6 - 2 \times 0,85 - 3 \times 0,35 = 3,25$ .

#### 4.6.2 Rayons et énergies

Dans le cadre de ce modèle, on peut estimer le rayon d'une orbitale atomique. On définit par  $dP(r) = r^2 R^2(r) dr$  la probabilité de trouver l'électron à la distance  $r$  du noyau et  $\frac{dP(r)}{dr}$  la densité radiale de probabilité. On a donc :

$$\frac{dP(r)}{dr} = r^2 \times N^2 \left( \frac{r}{a_0} \right)^{2(n^*-1)} \exp \left( -2 \frac{Z^*}{n^*} \frac{r}{a_0} \right)$$

Le rayon d'une orbitale atomique  $\rho$  est la plus grande valeur finie de  $r$  pour laquelle la densité radiale de probabilité est maximale. On cherche donc à annuler  $\frac{d^2 P(r)}{dr^2}$  :

$$\frac{d^2 P(r)}{dr^2} = \frac{N^2}{a_0^{2(n^*-1)}} \frac{d}{dr} \left( r^{2n^*} \exp \left( -2 \frac{Z^*}{n^*} \frac{r}{a_0} \right) \right)$$

D'où :

$$2n^* \cdot r^{2n^*-1} \exp \left( -2 \frac{Z^*}{n^*} \frac{r}{a_0} \right) + r^{2n^*} \left( \frac{-2Z^*}{n^* a_0} \right) \exp \left( -2 \frac{Z^*}{n^*} \frac{r}{a_0} \right) = 0$$

On trouve donc :

$$\frac{2n^*}{r} = \frac{2Z^*}{n^* a_0} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{(n^*)^2}{Z^*} a_0$$

Avec ce modèle, en considérant le rayon des orbitales de valence on peut avoir une estimation du rayon de l'atome.

Quant à l'énergie d'une orbitale atomique, elle est définie dans ce modèle (en se rapportant au cas hydrogénoïde) par :

$$E(n, l) = -13,6 eV \cdot \left( \frac{Z^*}{n^*} \right)^2$$

L'écrantage et donc  $Z^*$  changent en fonction de la configuration : l'énergie d'une OA calculée de cette façon dépend donc de la configuration électronique.

L'énergie électronique d'un atome ou d'un ion est la somme des énergies des électrons des orbitales de ce système, et seules les différences énergétiques auront une signification physique ici (calcul d'une énergie d'ionisation par exemple). Dans

de tels cas, il sera judicieux de réfléchir à ce qu'on a vraiment besoin de calculer : pour calculer l'énergie d'ionisation du fer par exemple ( $\text{Fe} \rightarrow \text{Fe}^+ + e^-$ ), il ne sera pas nécessaire de calculer les énergies des orbitales de l'argon puisque leurs énergies seront inchangées entre le fer neutre et son ion.

Calculons par exemple l'affinité électronique du chlore ( $Z = 17$ ). La configuration électronique fondamentale du chlore est  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$  et celle de l'anion chlorure est  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ . L'affinité électronique est définie par  $AE = E(\text{Cl}^-) - E(\text{Cl})$  avec :

$$\begin{aligned} E(\text{Cl}) &= 2 \cdot E(1s)_{\text{Cl}} + 8 \cdot E(2s, 2p)_{\text{Cl}} + 7 \cdot E(3s, 3p)_{\text{Cl}} \\ E(\text{Cl}^-) &= 2 \cdot E(1s)_{\text{Cl}^-} + 8 \cdot E(2s, 2p)_{\text{Cl}^-} + 8 \cdot E(3s, 3p)_{\text{Cl}^-} \end{aligned}$$

Or  $E(1s)_{\text{Cl}} = E(1s)_{\text{Cl}^-}$  car les orbitales  $3s$  et  $3p$  n'interviennent pas dans le calcul de  $Z_{1s}^*$  ; de même  $E(2s, 2p)_{\text{Cl}} = E(2s, 2p)_{\text{Cl}^-}$ . On a donc :

$$AE = 8 \cdot E(3s, 3p)_{\text{Cl}^-} - 7 \cdot E(3s, 3p)_{\text{Cl}}$$

On trouve  $Z^*(3s, 3p)_{\text{Cl}} = 6,1$  et  $Z^*(3s, 3p)_{\text{Cl}^-} = 5,75$ . D'où  $AE(\text{Cl}) = 6,1\text{eV}$  (la valeur expérimentale est de  $3,6\text{eV}$ ).

## 5 Les molécules

### 5.1 Approximation de Born-Oppenheimer

Le hamiltonien total  $\hat{\mathcal{H}}$  d'un système à  $n$  électrons et  $M$  noyaux (de masses  $M_A$  et de charges  $Z_A$ ) s'écrit en unités atomiques et avec les notations classiques (les minuscules représentent les électrons et les majuscules représentent les noyaux) :

$$\hat{\mathcal{H}} = \underbrace{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2}_{\hat{T}_{elec}} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{A=1}^M \frac{1}{M_A} \nabla_A^2}_{\hat{T}_{nucl}} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{A=1}^M \frac{Z_A}{r_{iA}}}_{\hat{V}_{Ze}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{1}{r_{ij}}}_{\hat{V}_{ee}} + \underbrace{\sum_{A=1}^M \sum_{B>A} \frac{Z_A Z_B}{r_{AB}}}_{\hat{V}_{ZZ}}$$

$\hat{T}_{elec}$  représente l'énergie cinétique des électrons et  $\hat{T}_{nucl}$  celle des noyaux.  $\hat{V}_{Ze}$  représente l'énergie potentielle électrostatique d'attraction noyau-électron,  $\hat{V}_{ee}$  celle de répulsion électron-électron, et  $\hat{V}_{ZZ}$  celle de répulsion noyau-noyau.

On se place alors dans le cadre de l'approximation de Born-Oppenheimer (1927) qui stipule que les électrons ont un mouvement beaucoup plus rapide que les noyaux et s'adaptent instantanément à leurs positions : *on découple donc les deux mouvements, et on considère les noyaux comme immobiles*<sup>8</sup> (comme les noyaux sont au moins 1836 fois plus lourds que les électrons, c'est légitime). Les distances internucléaires sont alors des paramètres, et on cherche des informations sur les électrons avec ces paramètres fixés. Les noyaux étant fixés, leur énergie cinétique  $\hat{T}_{nucl}$  est nulle et  $\hat{V}_{ZZ}$  est constant. On peut donc écrire :

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{elec} + \hat{V}_{ZZ}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{elec} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{A=1}^M \frac{Z_A}{r_{iA}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \frac{1}{r_{ij}} = \hat{T}_{elec} + \hat{V}_{Ze} + \hat{V}_{ee}$$

La fonction d'onde se décompose alors sous la forme  $\psi(r, R) = \psi_{elec}(r; R)\chi(R)$  où  $\psi_{elec}$  est la fonction d'onde électronique. Elle vérifie l'équation de Schrödinger électronique  $\hat{\mathcal{H}}_{elec}|\psi_{elec}\rangle = E_{elec}|\psi_{elec}\rangle$  et il vient ensuite que  $E_{tot} = E_{elec} + E_{nucl}$ ,  $E_{nucl}$  étant une valeur propre de  $\hat{V}_{ZZ}$  associée à  $\chi(R)$ .

### 5.2 Approximation orbitale

Comme pour les atomes, on ne peut pas obtenir de solutions exactes. On utilise donc l'approximation orbitale<sup>9</sup> :

$$\psi(1, \dots, n) = \phi_\alpha(1)\dots\phi_\omega(n)$$

8. On connaît donc en même temps la position et la vitesse des noyaux avec certitude ce qui semble être en contradiction avec le principe d'incertitude d'Heisenberg.

9. Il faut garder en tête que les orbitales ne sont pas une réalité physique : ce ne sont pas des observables comme peut l'être la densité électronique par exemple. Il faut les voir comme des outils mathématiques, outils très efficaces puisque la chimie orbitale permet d'expliquer de nombreux problèmes. Il existe d'autres méthodes pour analyser la fonction d'onde, comme les méthodes Valence Bond ou Electron Localization Function qui sont très largement hors du cadre de ce cours.

Les fonctions  $\phi_{\alpha_i}$  sont des fonctions monoélectroniques appelées orbitales moléculaires (OM), solutions d'une équation de Schrödinger mono-électronique  $\hat{h}\phi_i = \varepsilon_i\phi_i$ . Ces fonctions décrivent un électron dans une molécule (et peuvent contenir deux électrons : un électron  $\alpha$  et un électron  $\beta$ ). Dans le cas des atomes, ces fonctions monoélectroniques étaient les OA, que l'on pouvait trouver en partant du résultat pour l'atome d'hydrogène. Ici, on ne sait pas *a priori* quelles formes choisir pour ces fonctions.

### 5.3 Approximation LCAO

On va décomposer les OM  $\phi$  sur une base (au sens mathématique du terme). La question est de savoir sur quelle base les décomposer et il faut bien retenir qu'on peut décomposer les OM sur n'importe quelle base (une base de polynômes ou une base de gaussiennes par exemple). Pour réaliser en pratique un calcul numérique, on est obligé de tronquer la base mais si on utilise une base quelconque, on ne sait pas où la tronquer. On va donc chercher une base qui nous permet d'utiliser notre sens chimique. Le plus naturel est d'utiliser pour les OM une *Combinaison Linéaire d'Orbitales Atomiques* : le comportement d'un électron dans une molécule constituée d'atomes dépend un peu du comportement qu'il aurait dans chaque atome, et en particulier dans chaque orbitale atomique de chaque atome. Un atome garde donc ses propriétés au sein d'une molécule : s'il était électro-négatif, il le restera et attirera à lui les électrons dans un édifice polyatomique. On va donc écrire :

$$\phi_i = \sum_j c_{ij}\chi_j$$

où la somme se fait sur les  $j$  orbitales atomiques  $\chi_j$  considérées, et est pondérée par des coefficients  $c_{ij}$  : les coefficients  $c_{ij}$  sont les inconnus puisqu'on connaît la forme des OA. On peut par exemple les déterminer en utilisant une méthode variationnelle (cf Partie 7.1.8). Un point important à retenir est que si on part de  $n$  OA dans l'écriture des OM, on aura  $n$  OM car on fait un "simple" changement de base.

Cette écriture n'est une approximation que si on tronque la base ; si on ne le fait pas, c'est une théorie exacte. En général, on ne considèrera que les OA de valence : les OA de cœur sont trop contractées et resteront inchangées entre l'atome isolé et la molécule. On considèrera les OA de valence occupées ainsi que celles vacantes de même nombre quantique principale (pour Li par exemple, on prendra en compte les  $2s$  et les  $2p$  alors que sa configuration électronique fondamentale est  $1s^2 2s^1$ ).

### 5.4 Équations séculaires

On utilise cette écriture de  $\phi_i$  dans l'équation de Schrödinger mono-électronique :

$$\hat{h} \sum_j c_{ij}\chi_j = \varepsilon_i \sum_j c_{ij}\chi_j$$

On projette cette équation sur une orbitale  $\chi_k$ , et on aboutit à un système d'équation :

$$\sum_j c_{ij} \underbrace{\langle \chi_k | \hat{h} | \chi_j \rangle}_{h_{kj}} = \varepsilon_i \sum_j c_{ij} \underbrace{\langle \chi_k | \chi_j \rangle}_{S_{kj}}$$

$$\sum_j c_{ij} (h_{kj} - \varepsilon_i S_{kj}) = 0 \quad (\forall k)$$

L'opérateur hamiltonien a la propriété d'être *hermitien*, on a donc  $h_{kj} = h_{jk}^*$ . On a aussi  $S_{kj} = S_{jk}^*$ . Comme on utilise des OA réelles, on peut écrire  $h_{kj} = h_{jk}$  et  $S_{kj} = S_{jk}$ . On a donc ce qu'on appelle un *système d'équations séculaires*, qu'on peut éventuellement écrire sous forme matricielle (on suppose que la dimension de la base d'OA est  $p$ , i.e. qu'on a utilisé  $p$  OA) :

$$\begin{pmatrix} h_{11} - \varepsilon_i S_{11} & h_{12} - \varepsilon_i S_{12} & \dots & h_{1p} - \varepsilon_i S_{1p} \\ h_{21} - \varepsilon_i S_{21} & h_{22} - \varepsilon_i S_{22} & \dots & h_{2p} - \varepsilon_i S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p1} - \varepsilon_i S_{p1} & h_{p2} - \varepsilon_i S_{p2} & \dots & h_{pp} - \varepsilon_i S_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \dots \\ c_{ip} \end{pmatrix} = 0$$

On a alors un système de  $p$  équations à  $p$  inconnues (on rappelle que les inconnues sont les  $c_{ij}$  puisqu'étant donné qu'on connaît la forme mathématique des OA, on peut calculer les  $h_{kj}$  et les  $S_{kj}$ ). Une solution triviale (et non physique) de ce système d'équations est :  $\forall j, c_{ij} = 0$ . Le déterminant de ce système d'équations doit donc être nul pour avoir plus d'une solution :

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \varepsilon_i S_{11} & h_{12} - \varepsilon_i S_{12} & \dots & h_{1p} - \varepsilon_i S_{1p} \\ h_{21} - \varepsilon_i S_{21} & h_{22} - \varepsilon_i S_{22} & \dots & h_{2p} - \varepsilon_i S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p1} - \varepsilon_i S_{p1} & h_{p2} - \varepsilon_i S_{p2} & \dots & h_{pp} - \varepsilon_i S_{pp} \end{vmatrix} = 0$$

La résolution de ce problème nous donne la valeur des énergies  $\varepsilon_i$ . On trouve l'OM  $i$  associée en injectant la valeur de l'énergie  $\varepsilon_i$  dans le système d'équations ; il faut juste enlever 1 des équations (si on garde le même système, on trouvera  $\forall i, \forall j, c_{ij} = 0$ ), et la remplacer par la condition de normalisation  $\langle \phi_i | \phi_i \rangle = 1$ . Cette condition se réécrit :

$$\sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p c_{ij}^* c_{il} S_{jl} = 1$$

Le problème que nous avons maintenant est de calculer  $h_{kj}$  et  $S_{kj}$ ... Nous reviendrons sur ce système d'équations dans le cas de la théorie de Hückel (cf Partie 8).

## 5.5 Indiscernabilité des électrons

L'écriture de la fonction d'onde comme produit d'orbitales moléculaires ne satisfait pas deux principes de la mécanique quantique : (i) l'indiscernabilité des particules, et (ii) l'antisymétrie de la fonction d'onde. En effet, quand on écrit  $\psi$  sous la forme d'un produit (appelé produit de Hartree) :

$$\psi = \phi_\alpha(1) \dots \phi_\omega(n)$$

on sous-entend que l'électron 1 est dans la spin-orbitale  $\phi_\alpha$  et que l'électron  $n$  est dans la spin-orbitale  $\phi_\omega$ . On discerne donc les électrons, qui sont en pratique indiscernables. Si on raisonne sur deux électrons, les deux fonctions d'onde  $\phi_\alpha(1)\phi_\beta(2)$  et  $\phi_\alpha(2)\phi_\beta(1)$  sont envisageables et ont même poids statistique : il faut donc écrire la fonction d'onde sous la forme  $\phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) \pm \phi_\alpha(2)\phi_\beta(1)$ . Les électrons sont des fermions<sup>10</sup>, l'échange

10. Les fermions sont des particules à spin demi-entier, les bosons ont eux un spin entier.

de deux d'entre eux inverse donc le signe de la fonction d'onde (à l'opposé des bosons dont l'échange laisse inchangé la fonction d'onde). La bonne écriture de  $\psi$  est donc :

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_\alpha(1)\phi_\beta(2) - \phi_\alpha(2)\phi_\beta(1)]$$

Le facteur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  permet de normaliser la fonction  $\psi$ . Si on considère deux électrons dans une même orbitale et qu'on veut leur attribuer le même spin, on trouve  $\psi = 0$  : on retrouve donc le principe d'exclusion de Pauli.

Dans le cas où on a  $n$  électrons, il faut écrire la fonction d'onde sous la forme d'un *déterminant de Slater* pour avoir une fonction d'onde qui vérifie les deux propriétés précédentes. Un déterminant de Slater est un déterminant dans lequel chaque ligne correspond à une orbitale, et chaque colonne correspond à un électron. Le développement de ce déterminant permet donc d'obtenir toutes les combinaisons possibles entre électrons et orbitales. De plus l'échange de 2 colonnes d'un déterminant change le signe de celui-ci, ce qui est bien ce que l'on cherchait. Le terme de normalisation du déterminant est  $\frac{1}{\sqrt{n!}}$  :

$$\psi(1, 2, \dots, n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \phi_\alpha(1) & \phi_\alpha(2) & \dots & \phi_\alpha(n) \\ \phi_\beta(1) & \phi_\beta(2) & \dots & \phi_\beta(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_\omega(1) & \phi_\omega(2) & \dots & \phi_\omega(n) \end{vmatrix}$$

## 6 Théorie des groupes

La théorie des groupes que nous allons décrire dans ce chapitre permet de simplifier la vie du chimiste dans la recherche de la structure électronique d'un système. C'est une théorie mathématique très complexe et complète, et nous allons ici seulement utiliser certains de ses résultats.

### 6.1 Préliminaires

#### 6.1.1 Groupes

Nous allons nous intéresser à des groupes au sens mathématique du terme. On appelle *groupe* un ensemble  $G$  d'éléments muni d'une loi interne  $*$  telle que :

1. La loi  $*$  est associative :  $\forall (x, y, z) \in G^3, (x * y) * z = x * (y * z)$
2. Il existe un élément neutre  $e$  :  $\forall x \in G, x * e = e * x = x$
3. Tout élément a un symétrique :  $\forall x \in G, \exists y \in G$  tel que  $x * y = y * x = e$  ; on note  $y = x^{-1}$

On démontre assez facilement que l'élément neutre est unique. Si la loi  $*$  est commutative on parle de groupe commutatif (ou abélien). On appelle ordre d'un groupe le nombre d'éléments du groupe.

Les groupes que nous allons considérer auront pour éléments des opérations de symétrie : une opération de symétrie  $R_k$  est un déplacement par rapport à un élément géométrique tel que son action sur le système étudié (pour nous les atomes de la molécule) laisse inchangé le système. Dit différemment, quand on regarde la molécule, si on ferme les yeux et qu'on applique l'opération de symétrie, en rouvrant les yeux il n'est pas possible de dire en regardant la position des noyaux si l'opération de symétrie a été effectuée ou pas. Toutes les grandeurs propres à la molécule sont donc inchangées après  $R_k$  (charges des atomes, polarité, etc..).

*Vocabulaire* : deux éléments  $A$  et  $B$  d'un groupe sont dits conjugués s'il existe un élément  $C$  du groupe tel que  $A = C^{-1} * B * C$  ; on appelle alors classe d'équivalence l'ensemble des éléments conjugués les uns des autres. On peut décomposer un groupe  $G$  en ses classes d'équivalence. Par exemple, dans le groupe  $C_{3v}$ , les opérations  $C_3^1$  et  $C_3^2$  font partie de la même classe car on peut passer de l'une à l'autre avec  $\sigma_v$ .

#### 6.1.2 Opérations de symétrie

Avant de s'intéresser aux opérations de symétrie, il faut regarder les éléments de symétrie. On confond souvent les deux bien que mathématiquement ils n'aient rien à voir les uns avec les autres. Il existe trois éléments de symétrie : les points, les plans, les droites. Ceux-ci donnent naissance aux opérations de symétrie suivantes (une opération de symétrie est un mouvement des atomes) :

- *Identité* (noté  $E$ ) : c'est l'élément neutre de tous les groupes de symétrie.
- *Inversion* (noté  $i$ ) : elle inverse un point  $(x, y, z)$  en  $(-x, -y, -z)$ . Par définition, toutes les molécules centro-symétriques ont un centre d'inversion.
- *Rotation propre d'ordre  $n$*  (noté  $C_n$ ) : c'est une rotation d'un angle  $2\pi/n$ . On note  $C_n^m$  si on applique  $m$  fois la rotation d'angle  $2\pi/n$ . On cherche à avoir  $n$  le plus grand, i.e. le plus petit angle. Si une molécule a plusieurs axes, l'axe

principal sera celui de plus grand  $n$  (et il représentera souvent l'axe des  $z$ ). Le naphthalène a trois axes  $C_2$  : l'axe principal est celui qui est différent des deux autres, i.e. celui qui est perpendiculaire au plan de la molécule.

- *Réflexion* (noté  $\sigma$ ) : c'est une symétrie par rapport à un plan. Il existe plusieurs types de réflexion : les plans de réflexion peuvent contenir l'axe principal ( $\sigma_v$ ), y être perpendiculaire ( $\sigma_h$ ), ou de seconde espèce ( $\sigma_d$ ) i.e. de type  $\sigma_v$  mais bissecteur de deux axes  $C_2$  perpendiculaire à l'axe principal. On construit d'abord les  $\sigma_v$  en les faisant passer par les atomes, puis les  $\sigma_d$ .
- *Rotation impropre d'ordre  $n$*  (noté  $S_n$ ) : c'est la composition entre une rotation propre  $C_n$  et une réflexion  $\sigma$  par rapport à un plan perpendiculaire à  $C_n$  (ex : l'éthane en position décalée a une rotation propre  $S_6$ )

### 6.1.3 Groupes de symétrie

On parle de *groupe ponctuel de symétrie* car il y a toujours un point inchangé par toutes les opérations (le centre de gravité de la molécule). En cristallographie, on regarde aussi les translations et on parle alors de groupes d'espace ou groupes cristallographiques. On peut faire la liste des groupes ponctuels de symétrie (cf Tableau 2). Ils sont décomposés en plusieurs catégories : les groupes simples (avec un seul élément de symétrie) ; les groupes avec un seul axe de symétrie d'ordre  $n \geq 2$  ; les groupes avec plusieurs axes d'ordre  $n \geq 3$  ; les groupes spéciaux.

| Groupes        | Éléments de symétrie   | Exemples   |
|----------------|--|--|
| $C_s$          | 1 plan de symétrie   | HOCl, SOCl <sub>2</sub>                            |
| $C_i$          | 1 centre de symétrie   | Acide mésotartrique                                |
| $C_n$          | 1 axe $C_n$  | H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> géométrie quelconque |
| $C_{nh}$       | 1 axe $C_n$ , 1 plan $\sigma_h$  | H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> transplanaire        |
| $C_{nv}$       | 1 axe $C_n$ , $n$ plans $\sigma_v$   | H <sub>2</sub> O <sub>2</sub> cisplanaire          |
| $D_n$          | 1 axe $C_n$ , $n$ axes $C_2' \perp C_n$  | C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> géométrie quelconque |
| $D_{nh}$       | 1 axe $C_n$ , $n$ axes $C_2' \perp C_n$ , 1 plan $\sigma_h$ , $n$ plans $\sigma_v$ | C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> éclipsée             |
| $D_{nd}$       | 1 axe $C_n$ , $n$ axes $C_2' \perp C_n$ , $n$ plans $\sigma_d$                     | C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> décalée              |
| $S_{2n}$       | 1 axe $S_{2n}$   | Rien de simple, cf livres                          |
| $C_{\infty v}$ | 1 axe $C_{\infty}$ , une infinité de plans $\sigma_v$                              | NO, HF   |
| $D_{\infty h}$ | 1 axe $C_{\infty}$ , une infinité de plans $\sigma_v$ , inversion                  | CO <sub>2</sub> , N <sub>2</sub>                   |
| $T_d$          | Groupe du tétraèdre  | CH <sub>4</sub>                                    |
| $O_h$          | Groupe de l'octaèdre ou du cube  | SF <sub>6</sub>                                    |

TABLE 2 – Les groupes ponctuels de symétrie (avec les notations de Schönflies).

### 6.1.4 Détermination du groupe de symétrie d'une molécule

La première étape de beaucoup de problèmes sera toujours de déterminer le groupe de symétrie du système étudié. Pour ce faire, plusieurs stratégies s'offrent à nous :

- On cherche tous les éléments de symétrie de la molécule ce qui revient à construire le groupe : c'est long, fastidieux, il y a des risques d'erreurs, et c'est surtout sans intérêt puisque d'autres personnes l'ont déjà fait avant nous.
- On utilise notre expérience : si on sait que le benzène fait partie du groupe  $D_{6h}$ , on en déduit que l'anion cyclopentadienyl fera partie du groupe  $D_{5h}$ .
- On utilise l'organigramme Fig. 11 en commençant par trouver l'axe principal.

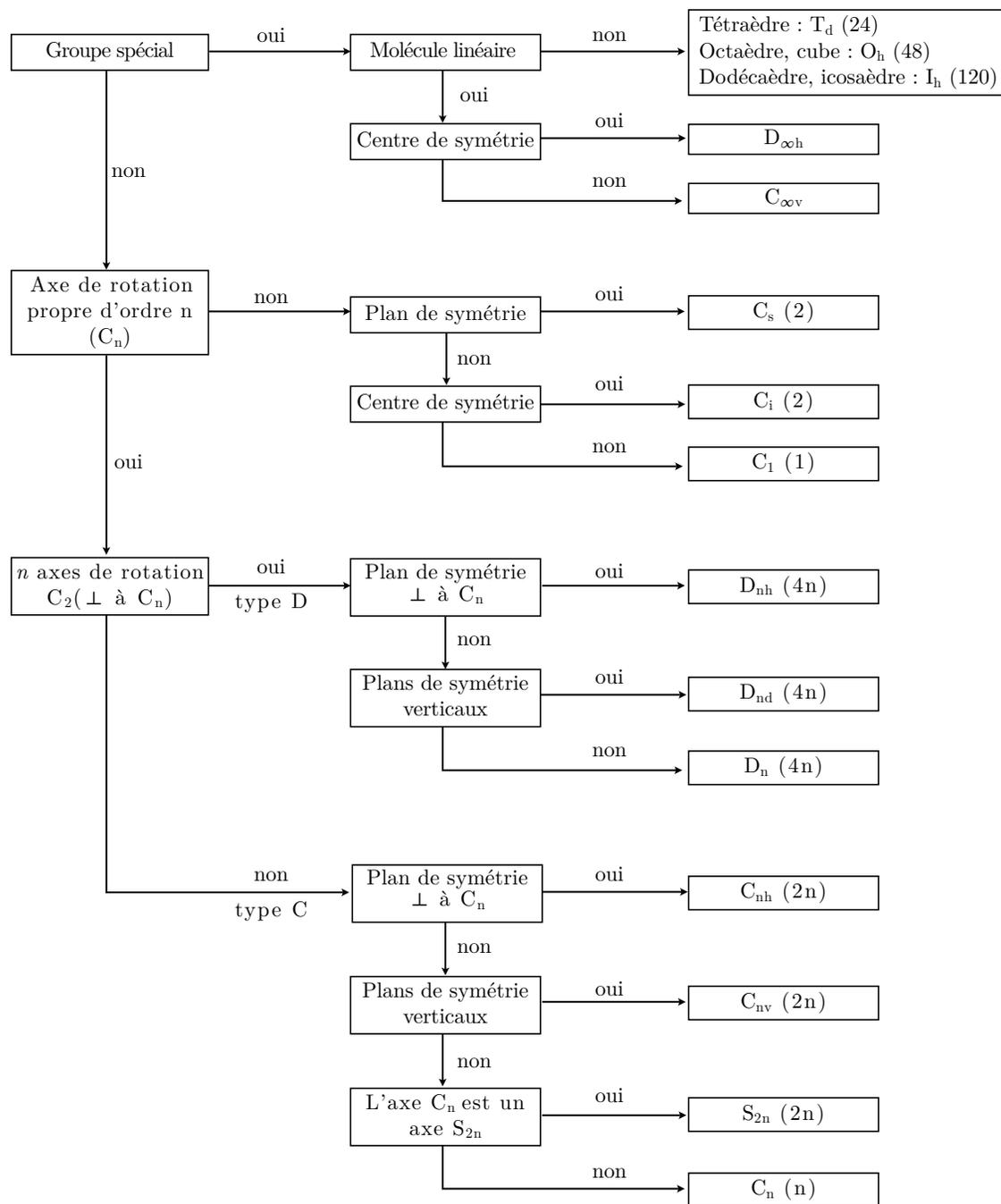


FIGURE 11 – Organigramme pour la détermination du groupe de symétrie d'une molécule (entre parenthèses, le nombre d'éléments du groupe).

### 6.1.5 Utilité de la théorie des groupes

Prenons l'exemple de la molécule d'eau  $\text{H}_2\text{O}$ . Si on se place dans la base des orbitales de valence (orbitales  $1s$  des hydrogènes et orbitales  $2s$  et  $2p$  de l'oxygène), il nous faut résoudre un problème en dimension 6, i.e. diagonaliser des déterminants séculaires  $6 \times 6$ . Dès que le problème va augmenter en taille, il deviendra insoluble à la main (déterminants  $43 \times 43$  pour  $\text{Fe}(\text{H}_2\text{O})_6^{2+}$ ). Nous allons voir qu'on peut construire des diagrammes d'orbitales moléculaires juste avec la théorie des groupes et sans aucun calculs. En pratique, lorsqu'on aura besoin de diagonaliser le hamiltonien, on travaillera dans des sous-espaces (qui seront les bases des RI, voir plus loin) pour simplifier les calculs. Ces simplifications viennent du fait que la théorie des groupes nous indique que certaines intégrales ne peuvent valoir que 0.

La théorie des groupes permet aussi de prédire les propriétés (ou absence de propriétés) de certaines molécules. Par exemple, si une molécule appartient à un groupe de symétrie avec un axe  $S_n$ , la molécule est superposable à son image par rapport à un plan après rotation ; par définition, elle est donc achirale. De plus, une molécule ne possède un moment dipolaire permanent que si une des représentations irréductibles de type  $T_\alpha$  (i.e. les translations) de son groupe ponctuel est la représentation irréductible totalement symétrique. S'il y a un axe  $C_n$ , un éventuel moment dipolaire ne peut pas y être orthogonal mais peut seulement y être aligné. On en déduit que seules les molécules appartenant aux groupes  $C_n$ ,  $C_{nv}$  et  $C_s$  peuvent avoir un moment dipolaire électrique permanent.

### 6.1.6 Nécessité de la théorie des groupes

En plus d'être utile, il est nécessaire d'utiliser la théorie des groupes. On a vu que les opérations  $R_k$  laissent inchangées la molécule : l'opérateur  $\hat{R}_k$  commute donc avec le hamiltonien  $\hat{H}$ , i.e.  $[\hat{H}, \hat{R}_k] = 0$ . La mécanique quantique nous enseigne alors que  $\hat{H}$  et  $\hat{R}_k$  ont un même jeu de fonctions propres (i.e. si  $\hat{H}\Psi = E\Psi$  alors  $\hat{H}(\hat{R}_k\Psi) = E(\hat{R}_k\Psi)$  et donc  $\hat{R}_k\Psi = \pm\Psi$ ). Les fonctions propres de  $\hat{H}$  doivent donc être des fonctions propres de  $\hat{R}_k$ . Si on prend l'exemple de  $\text{H}_2$  avec la base des deux orbitales  $1s$  (notées  $1s_1$  et  $1s_2$ ), on constate que cette base n'est pas bonne : une des opérations de symétrie est l'inversion et suite à cette opération, l'orbitale  $1s_1$  devient  $1s_2$  et vice-versa. Une bonne base est par contre  $\{1s_1 + 1s_2, 1s_1 - 1s_2\}$ , où l'une des fonctions reste inchangée et l'autre est changée en son inverse. "Ôh miracle", ces fonctions sont aussi les deux orbitales moléculaires de  $\text{H}_2$  (à un coefficient près). Les orbitales qui doivent être considérées dans un problème ne doivent donc pas être n'importe lesquelles.

## 6.2 Représentation d'un groupe

### 6.2.1 Représentation matricielle d'un groupe

Nous allons maintenant rentrer dans le cœur de la théorie des groupes en commençant par étudier la molécule d'eau dans sa géométrie d'équilibre dans la base des orbitales de valence, i.e.  $\{2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z, 1s_1, 1s_2\}$ . La molécule d'eau a 4 opérations de symétrie : outre l'identité, un axe  $C_2$ , et deux plans  $\sigma_v(xz)$  et  $\sigma'_v(yz)$  (l'axe  $z$  est pris selon l'axe  $C_2$ , l'axe des  $x$  est dans le plan de la molécule et l'axe  $y$  part vers le fond<sup>11</sup>, cf Figure 12) : l'eau fait donc partie du groupe ponctuel de symétrie  $C_{2v}$ .

11. Par convention, l'axe  $z$  est confondu avec l'axe principal et passe par le maximum d'atomes.

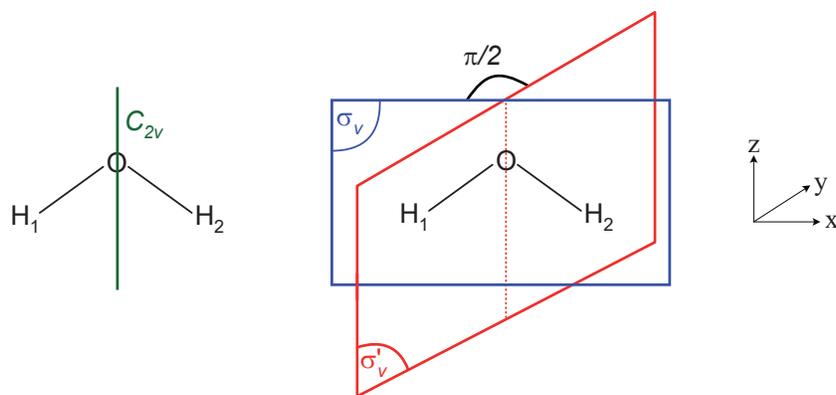


FIGURE 12 – Symétries de la molécule d'eau dans sa géométrie d'équilibre.

Nous allons représenter l'effet de ces quatre opérations de symétrie sur la base considérée sous forme de matrices. On note  $M(R_k)$  la matrice de l'opération  $R_k$ .

$$M(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(\sigma_v(xz)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(\sigma'_v(yz)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc établi les matrices de chaque opération pour ce problème en dimension 6. L'ensemble des matrices qui représentent les opérations du groupe est appelé *représentation matricielle* et on le note  $\Gamma$ ; en base  $n$ , on le note  $\Gamma_n$ . Nous venons donc d'établir  $\Gamma_6$  pour  $\text{H}_2\text{O}$ . Le problème est qu'on peut aussi regarder cette question en dimension 3 avec la base  $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ ; on a alors quatre matrices  $3 \times 3$  pour  $\Gamma_3$  qui représentent comment est transformée la base par les opérations de symétrie :

$$M(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(C_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(\sigma_v(xz)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(\sigma'_v(yz)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La représentation matricielle dépend donc du choix de la base : ce n'est pas très pratique, puisqu'on aimerait avoir des représentations plus générales pour s'affranchir de ce choix. En particulier, on aimerait savoir quelles sont les représentations de dimensions minimales. On constate au passage que les matrices sont diagonales par

bloc (cf les quatre matrices  $6 \times 6$ ) : les opérations de symétrie ne mélangent pas certaines orbitales (on imagine mal une orbitale de l'hydrogène se transformer en une orbitale de l'oxygène!). Nous concluons ce paragraphe en notant que raisonner avec des matrices est plus facile à digérer par un ordinateur que raisonner sur des opérations de symétrie en trois dimensions.

### 6.2.2 Représentations réductibles et irréductibles

Ce paragraphe est LE point délicat du cours. Je recommande de lire différents ouvrages pour appréhender le sujet de plusieurs façons. Regardons les quatre matrices  $3 \times 3$  : elles sont diagonales. Nous allons les représenter sous la forme de colonnes en utilisant des couleurs différentes pour les éléments de la base :

$$M(E) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; M(C_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; M(\sigma_v(xz)) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; M(\sigma'_v(yz)) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ce qu'on peut écrire légèrement différemment, en ne regardant plus les opérations mais les éléments de la base et l'effet des opérations sur ceux-ci :

|     | E | $C_2$ | $\sigma_v(xz)$ | $\sigma'_v(yz)$ |       |
|-----|---|-------|----------------|-----------------|-------|
| $x$ | 1 | -1    | 1              | -1              | $B_1$ |
| $y$ | 1 | -1    | -1             | 1               | $B_2$ |
| $z$ | 1 | 1     | 1              | 1               | $A_1$ |

Mathématiquement, cela peut s'écrire  $\Gamma_3 = B_1 \oplus B_2 \oplus A_1$  où ce qu'on a noté  $A_1$ ,  $B_1$  et  $B_2$  (nous reviendrons plus tard sur ces notations) sont des quadruplets de matrices de dimension 1. **Ils représentent comment est transformé un élément de la base par les différentes opérations de symétrie du groupe** (par exemple, en bleu on indique comment est transformé  $x$  pour chacune des opérations). Le symbole  $\oplus$  représente la somme directe au sens mathématique.  $A_1$ ,  $B_1$  et  $B_2$  sont des représentations de dimensions 1 : on les appelle des représentations irréductibles (notées RI) parce qu'on ne peut pas les décomposer en des matrices de dimension plus petites (!). On peut ainsi dire par exemple que l'élément  $\vec{y}$  est transformé selon  $B_2$  dans  $C_{2v}$ . Chaque groupe ponctuel de symétrie aura un nombre donné de RI.

La représentation  $\Gamma_3$  est ce qu'on appelle une représentation réductible (notée RR) puisqu'on peut la décomposer en trois lots de matrices de dimension 1 : **elle indique comment la base se transforme selon les différentes opérations de symétrie**. On peut démontrer que toute représentation réductible  $\Gamma_n$  est toujours une combinaison linéaire unique à coefficients entiers de RI. Chaque matrice de la RR peut alors être écrite sous la forme d'une matrice diagonale par bloc où les  $i$ -èmes blocs de chaque matrice ont tous la même taille et représentent les RI. Pour des RI de dimension 2 et 3, on ne peut pas trouver de bases où toutes les matrices de la RI sont diagonales et donc les réduire en somme de deux ou trois RI de dimension 1.

Regardons maintenant les quatre matrices  $6 \times 6$  : soit on les diagonalise, soit on fait un changement de base avec  $1s_1 + 1s_2$  et  $1s_1 - 1s_2$  (mathématiquement, cela revient au même). On les représente à leur tour sous forme de vecteurs colonnes :

$$M(E) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; M(C_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; M(\sigma_v(xz)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; M(\sigma'_v(yz)) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pour clarifier, on a directement utilisé des couleurs. Là aussi on peut écrire ceci différemment, et on se rend compte qu'interviennent les mêmes RI que pour  $\Gamma_3$  :

|             | E | $C_2$ | $\sigma_v(xz)$ | $\sigma'_v(yz)$ |       |
|-------------|---|-------|----------------|-----------------|-------|
| $2s$        | 1 | 1     | 1              | 1               | $A_1$ |
| $2p_x$      | 1 | -1    | 1              | -1              | $B_1$ |
| $2p_y$      | 1 | -1    | -1             | 1               | $B_2$ |
| $2p_z$      | 1 | 1     | 1              | 1               | $A_1$ |
| $s_1 + s_2$ | 1 | 1     | 1              | 1               | $A_1$ |
| $s_1 - s_2$ | 1 | -1    | 1              | -1              | $B_1$ |

On a donc ici :  $\Gamma_6 = 3A_1 \oplus 2B_1 \oplus B_2$ . On constate en effet qu'en base 6, l'effet des quatre opérations est le même sur trois des vecteurs de la base ( $2s$ ,  $2p_z$  et  $1s_1 + 1s_2$ ), effet noté  $A_1$  qui est appelé la représentation totalement symétrique.

### 6.3 Caractères

*Rappels* : on appelle trace d'une matrice la somme de ses éléments diagonaux (valable uniquement pour une matrice carrée). On peut démontrer que pour deux matrices A et B,  $Tr(AB) = Tr(BA)$ , ce qui implique que la trace est indépendante de la base dans laquelle une matrice est représentée (dans une dimension donnée).

#### 6.3.1 Caractères d'une opération

En théorie des groupes, on appellera *caractère de  $R_k$*  et on note  $\chi(R_k)$  la trace de la matrice  $M(R_k)$ . Un groupe de symétrie sera représenté par sa table de caractère : c'est un tableau avec d'une part les opérations de symétrie du groupe et d'autre part ses RI. On trouve dans ce tableau les caractères de chaque opération pour chaque RI. Pour les RI de dimension 1, le caractère est l'unique élément de la matrice. La table de caractères du groupe  $C_{2v}$  est ainsi donnée ci-dessous en exemple (Tableau 3) :

| $C_{2v}$ | E  | $C_2(z)$ | $\sigma_v(xz)$ | $\sigma'_v(yz)$ |            |                 |
|----------|----|----------|----------------|-----------------|------------|-----------------|
| $A_1$    | +1 | +1       | +1             | +1              | $T_z$      | $x^2; y^2; z^2$ |
| $A_2$    | +1 | +1       | -1             | -1              | $R_z$      | $xy$            |
| $B_1$    | +1 | -1       | +1             | -1              | $T_x; R_y$ | $xz$            |
| $B_2$    | +1 | -1       | -1             | +1              | $T_y; R_x$ | $yz$            |

TABLE 3 – Table de caractères du groupe ponctuel de symétrie  $C_{2v}$ .

Il apparaît ici une nouvelle RI ( $A_2$ ) que nous n'avons pas rencontré dans la décomposition de  $\Gamma_3$  et de  $\Gamma_6$  pour l'eau. La troisième partie du tableau précise comment se transforment les translations ( $T_\alpha$ ) et les rotations selon les différents

axes ( $R_\alpha$ ) et la dernière partie indique comment se transforment les termes carrés et rectangles. Ces deux colonnes sont très utiles en spectroscopie : en spectroscopie infra-rouge, on s'intéresse au moment dipolaire et celui-ci a des coordonnées selon les axes (Ox), (Oy) et (Oz) on peut donc d'un coup d'œil connaître les RI de ces coordonnées. En spectroscopie Raman, on regarde le tenseur de polarisabilité dipolaire dont les composantes se transforment comme les termes carrés ou rectangles.

De manière générale, on notera A et B les RI de dimensions 1. A si le caractère associé à la rotation principale est +1, B si c'est -1. S'il y a un plan de réflexion, on notera  $A_1$  si on a +1 pour toutes les opérations de symétrie et  $A_2$  si on a un caractère -1 pour les réflexions. On notera E les RI de dimensions 2 et T celles de dimensions 3 (attention, ne pas confondre les RI E et l'opération identité notée E, de même que les RI T et la transformation selon les translations  $T_{x/y/z}$ ), et pour E et T on ne regardera que la trace de chaque bloc (i.e. le caractère). Lorsqu'il y a plusieurs RI du même type, on les différencie par des indices : 1 si la RI est symétrique par rapport à une opération  $C_2$  dont l'axe est perpendiculaire à l'axe principal (ou par rapport à un plan de symétrie si un tel axe  $C_2$  n'existe pas) et 2 si la RI est antisymétrique. Les ' et ' ' indiquent respectivement des RI symétriques/antisymétriques par rapport à une réflexion  $\sigma_h$ . S'il existe une opération inversion dans le groupe considéré, et si le caractère de l'opération  $i$  est positif, les RI sont indicées en plus d'un **g** (ou d'un **u** si le caractère de  $i$  est négatif).

*Commentaire* : lorsqu'on fait l'échange  $x \rightleftharpoons y$ , on échange  $B_1$  et  $B_2$  ( $B_1 \rightleftharpoons B_2$ ,  $B_2 \rightleftharpoons B_1$ ). Ce qui fait que selon les conventions prises, on trouve pour l'eau soit  $\Gamma_6 = 3A_1 \oplus 2B_1 \oplus B_2$  soit  $\Gamma_6 = 3A_1 \oplus B_1 \oplus 2B_2$ . Il faut donc vraiment faire attention aux conventions. Une bonne façon de vérifier qu'on ne se trompe pas est de regarder la troisième partie des tables de caractères et comment se transforment les axes.

Pour finir notre propos, nous allons regarder la table de caractère du groupe  $C_{3v}$  auquel appartient par exemple  $\text{NH}_3$  dans sa géométrie d'équilibre (cf Tableau 4) :

| $C_{3v}$ | E  | $2C_3(z)$ | $3\sigma_v$ |                          |                             |
|----------|----|-----------|-------------|--------------------------|-----------------------------|
| $A_1$    | +1 | +1        | +1          | $T_z$                    | $x^2 + y^2; z^2$            |
| $A_2$    | +1 | +1        | -1          | $R_z$                    |                             |
| E        | +2 | -1        | 0           | $(T_x, T_y); (R_x, R_y)$ | $(x^2 - y^2, xy); (xz, yz)$ |

TABLE 4 – Table de caractères du groupe ponctuel de symétrie  $C_{3v}$ .

On note ici que les caractères de l'opération identité pour chaque RI révèlent la dimension de la RI (2ème colonne du tableau), et donc la dégénérescence des orbitales qui auront cette symétrie. On note aussi que les opérations sont regroupées par classes de symétrie : il y a deux rotations  $C_3$  (une de  $2\pi/3$  et une de  $4\pi/3$ ) qui sont conjuguées ; leurs caractères sont les mêmes donc on les regroupe dans une même classe (idem pour  $\sigma_v$ ).  $C_{3v}$  est donc constitué de trois classes et de six opérations de symétrie. Quand des  $T_i$  ou des  $R_i$  sont entre parenthèses dans une table de caractères, c'est qu'elles sont inséparables : les coordonnées  $x$  d'un vecteur transformé par  $C_3$  dépendent de  $x$  et de  $y$  et donc on ne dissocie pas  $T_x$  et  $T_y$ .

### 6.3.2 Caractères d'une représentation

On appelle *caractère d'une RR*  $\Gamma_n$  (noté aussi  $\Gamma$ ) la liste des caractères des éléments du groupe de symétrie auquel appartient la molécule. On note donc de la même façon la représentation matricielle et l'ensemble des caractères : on fait ainsi car seuls les caractères nous intéressent puisqu'ils sont indépendants de la base (dans une dimension donnée) et c'est donc aux caractères des représentations qu'on s'intéressera le plus par la suite. Il est par contre évident que l'ordre des caractères des opérations dans le caractère d'une représentation est important et il ne faudra pas passer d'une table de caractères à une autre sans vérifier que l'ordre des opérations et les conventions des axes y sont les mêmes. Avoir des conventions différentes de la table de caractères utilisée est d'ailleurs une source très fréquente d'erreurs. Revenons sur l'exemple de l'eau qui appartient au groupe  $C_{2v}$  : le caractère de  $\Gamma_3$  est  $\Gamma = \{3 \ -1 \ 1 \ 1\}$  et celui de  $\Gamma_6$  est  $\Gamma = \{6 \ 0 \ 4 \ 2\}$ .

## 6.4 Réduction d'une représentation

Nous allons maintenant nous intéresser à comment réduire une RR  $\Gamma_n$  en somme de RI. Cela est utile car pour qu'une intégrale  $H_{ij} = \int \Psi_i^* \hat{H} \Psi_j d\tau$  soit non nulle il **faudrait** que  $\Psi_i^*$  et  $\Psi_j$  appartiennent à la même RI (*vide infra*), qu'il aura donc fallu déterminer. On peut établir une stratégie à suivre :

1. on fixe une géométrie pour la molécule qu'on regarde ;
2. on cherche à quel groupe ponctuel de symétrie elle appartient ;
3. on choisit une base adéquate (la base des orbitales de valence par exemple) ;
4. on détermine le caractère  $\Gamma$  de la représentation (voir ci-dessous) ;
5. on décompose  $\Gamma$  en somme de RI.

Pour déterminer le caractère de la représentation, on prend successivement chaque opération de symétrie du groupe et pour chacune d'entre elle, on regarde comment est transformé chaque élément de la base quand on lui applique l'opération de symétrie : on compte +1 s'il est transformé en lui-même (un 1 apparaîtra sur la diagonale de la matrice), -1 s'il est transformé en son opposé (il y aura -1 dans la matrice), et 0 s'il est transformé en une autre orbitale. Une orbitale peut parfois être transformée en combinaison linéaire d'elle-même et d'une autre orbitale : après une rotation d'un angle  $\theta$  par exemple,  $\vec{x}$  devient  $\cos \theta \cdot \vec{x} + \sin \theta \cdot \vec{y}$  ; on comptera donc  $\cos \theta$  pour  $\vec{x}$ . Pour finir, on fait la somme. On peut de cette façon retrouver  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_6$  de l'eau.

*Note* : il existe un théorème, appelé Grand Théorème d'Orthogonalité (GTO) qui va par la suite nous fournir de nombreuses informations. On ne présente pas le GTO ici, ni aucunes des démonstrations, mais seulement ses conséquences. Les démonstrations sont dans la littérature (cf Cotton p81 par exemple).

Pour trouver comment décomposer une RR en somme de RI, on utilise la formule suivante. Soit  $\chi(R_k)$  le caractère de l'opération  $R_k$  dans la RR,  $\chi_i(R_k)$  celui de cette même opération  $R_k$  dans la  $i$ -ème RI,  $g_k$  le nombre d'éléments dans la classe  $k$ , et  $g$  l'ordre du groupe. La  $i$ -ème RI apparaîtra  $n_i$  fois dans la réduction de  $\Gamma_n$ , avec :

$$n_i = \frac{1}{g} \sum_{Classes} g_k \chi(R_k) \chi_i(R_k)$$

Pour fixer les idées, appliquons cette formule à la molécule d'eau dans sa géométrie d'équilibre en dimension 6 (avec comme base les OA de valence). On rappelle la table de caractères de  $C_{2v}$  (où  $g=4$  et où nous avons ajouté des **1** devant chaque classe pour indiquer qu'il n'y a qu'1 opération de symétrie par classe), ainsi que le caractère de la représentation réductible  $\Gamma_6$ . Pour rappel, la RR a été obtenue en regardant pour chaque opération comment se transforme chacun des éléments de la base par rapport à lui-même, et en faisant la somme pour toute la base. Par exemple, pour  $C_2(z)$  : les  $1s$  deviennent des choses différentes d'elles-mêmes et on compte 0, les  $2s$  et  $2p_z$  restent elles-mêmes et on compte +1, et les  $2p_x$  et  $2p_y$  deviennent l'opposé d'elles-mêmes et on compte -1 ; la somme fait **0**.

| $C_{2v}$       | 1E       | 1C <sub>2</sub> (z) | 1σ <sub>v</sub> (xz) | 1σ' <sub>v</sub> (yz) |
|----------------|----------|---------------------|----------------------|-----------------------|
| A <sub>1</sub> | +1       | +1                  | +1                   | +1                    |
| A <sub>2</sub> | +1       | +1                  | -1                   | -1                    |
| B <sub>1</sub> | +1       | -1                  | +1                   | -1                    |
| B <sub>2</sub> | +1       | -1                  | -1                   | +1                    |
| Γ              | <b>6</b> | <b>0</b>            | <b>4</b>             | <b>2</b>              |

En appliquant la formule précédente on trouve :

$$\begin{aligned}
 n_{A_1} &= \frac{1}{4} \left( 1 \times (+1) \times \mathbf{6} + 1 \times (+1) \times \mathbf{0} + 1 \times (+1) \times \mathbf{4} + 1 \times (+1) \times \mathbf{2} \right) = \frac{1}{4} (6 + 0 + 4 + 2) = 3 \\
 n_{A_2} &= \frac{1}{4} \left( 1 \times (+1) \times \mathbf{6} + 1 \times (+1) \times \mathbf{0} + 1 \times (-1) \times \mathbf{4} + 1 \times (-1) \times \mathbf{2} \right) = \frac{1}{4} (6 + 0 - 4 - 2) = 0 \\
 n_{B_1} &= \frac{1}{4} \left( 1 \times (+1) \times \mathbf{6} + 1 \times (-1) \times \mathbf{0} + 1 \times (+1) \times \mathbf{4} + 1 \times (-1) \times \mathbf{2} \right) = \frac{1}{4} (6 - 0 + 4 - 2) = 2 \\
 n_{B_2} &= \frac{1}{4} \left( 1 \times (+1) \times \mathbf{6} + 1 \times (-1) \times \mathbf{0} + 1 \times (-1) \times \mathbf{4} + 1 \times (+1) \times \mathbf{2} \right) = \frac{1}{4} (6 - 0 - 4 + 2) = 1
 \end{aligned}$$

On trouve donc  $\Gamma_6 = 3A_1 + 2B_1 + B_2$  qui est le résultat que nous avons déjà trouvé (en général on écrit un simple + à la place de  $\oplus$ ). On peut vérifier qu'on ne s'est pas trompé en s'assurant que le caractère de l'opération  $k$  dans la RR est égal à la somme des caractères de cette opération dans toutes les opérations qui apparaissent dans la décomposition en RI (par exemple pour E :  $\mathbf{6} = 3 \times (+1) + 0 \times (+1) + 2 \times (+1) + 1 \times (+1)$ ). On peut aussi parfois essayer de faire ceci de tête pour des petites dimensions, par exemple pour  $\Gamma_3$  :

| $C_{2v}$       | E        | C <sub>2</sub> (z) | σ <sub>v</sub> (xz) | σ' <sub>v</sub> (yz) |
|----------------|----------|--------------------|---------------------|----------------------|
| A <sub>1</sub> | +1       | +1                 | +1                  | +1                   |
| A <sub>2</sub> | +1       | +1                 | -1                  | -1                   |
| B <sub>1</sub> | +1       | -1                 | +1                  | -1                   |
| B <sub>2</sub> | +1       | -1                 | -1                  | +1                   |
| Γ              | <b>3</b> | <b>-1</b>          | <b>1</b>            | <b>1</b>             |

On voit avec le **3** de E que la RR va faire intervenir trois RI en tout, et  $A_1$  sera présent. On peut donc soustraire  $A_1$  à la RR et réduire  $\{2 -2 0 0\}$ . On regarde ensuite le caractère de  $C_2$  dans la RR (**-1**) : les seules options sont alors  $A_1 + B_1 + B_2$ ,  $A_1 + 2B_1$  ou  $A_1 + 2B_2$ . Seul  $A_1 + B_1 + B_2$  est compatible avec les deux caractères restants.

Lorsqu'on raisonne avec une base d'orbitales, on peut commencer par décomposer les représentations réductibles : dans la base des orbitales de valence de l'eau par exemple, on peut d'une part chercher à décomposer  $\Gamma_2$  (formée par les hydrogènes), et d'autre part  $\Gamma_4$  (formée sur l'oxygène). On a ensuite  $\Gamma_6 = \Gamma_2 \oplus \Gamma_4$ .

## 6.5 Projecteurs

Nous avons appris à décomposer une représentation réductible en somme de représentations irréductibles. Cela nous permet de savoir qu'il existe une base dans laquelle les matrices des opérations de symétrie seront diagonales par blocs, et on connaît désormais la taille qu'aura chaque bloc pour toutes les opérations de symétrie.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \xrightarrow{\text{Changement de base}} & \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \square & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \square & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \square & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \square \end{pmatrix} \\
 \text{Matrice d'une opération} & & \text{Matrice diagonale par blocs} \\
 \text{de symétrie quelconque} & & \text{dans la nouvelle base}
 \end{array}$$

Pour écrire les matrices sous forme diagonale par blocs, on doit faire un changement de base, mais pour l'instant on ne connaît pas ce changement de base. On va pour cela utiliser des projecteurs, qui nous permettront de trouver ce qu'on appelle des *orbitales de symétrie* (OS). Une OS est une combinaison linéaire des orbitales de la base qui aura la même symétrie que la RI. On fait une projection au sens mathématique du terme, à savoir qu'on cherche la composante d'une orbitale de la base initiale dans le sous-espace de la RI. C'est dans la base des orbitales de symétrie que les matrices seront toutes diagonales par blocs.

L'opérateur  $\hat{P}^{(\Gamma_i)}$  suivant projette dans le sous-espace associé à la RI  $\Gamma_i$  (attention, la somme est faite sur les opérations de symétrie et pas sur les classes d'équivalence, et il peut être utile d'écrire une table de caractère où les classes sont décomposées) :

$$\hat{P}^{(\Gamma_i)} = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^g \chi^{*(\Gamma_i)}(R_k) \cdot \hat{R}_k$$

Les fonctions projetées sont souvent appelées *bases de la RI*  $\Gamma_i$  ; ce sont des bases au sens mathématique du terme i.e. des familles libres et génératrices. Pour des RI de dimension 1 ( $A$  et  $B$ ), toute orbitale de symétrie adaptée sera une base de la RI. Pour des RI de dimension 2 ou 3, il faut que les éléments de la base ne soient pas liés. Pour obtenir une OM  $\phi^{(\Gamma_i)}$  associée à la RI  $\Gamma_i$ , on applique  $\hat{P}^{(\Gamma_i)}$  à une des fonctions de la base de départ. En pratique, on omet souvent le facteur  $\frac{1}{g}$  et on norme ensuite les orbitales. Restons encore et toujours sur l'exemple de l'eau dans sa géométrie d'équilibre avec la base des orbitales de valence. L'application de la formule donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\hat{P}^{(A_1)}(1s_A) &\propto (+1)\hat{E}(1s_A) + (+1)\hat{C}_2(1s_A) + (+1)\hat{\sigma}_v(xz)(1s_A) + (+1)\hat{\sigma}_v(yz)(1s_A) \\
&\propto 1s_A + 1s_B + 1s_B + 1s_A \propto 1s_A + 1s_B \\
\hat{P}^{(B_1)}(1s_A) &\propto (+1)\hat{E}(1s_A) + (-1)\hat{C}_2(1s_A) + (+1)\hat{\sigma}_v(xz)(1s_A) + (-1)\hat{\sigma}_v(yz)(1s_A) \\
&\propto 1s_A - 1s_B + 1s_A - 1s_B \propto 1s_A - 1s_B \\
\hat{P}^{(B_2)}(1s_A) &\propto (+1)\hat{E}(1s_A) + (-1)\hat{C}_2(1s_A) + (-1)\hat{\sigma}_v(xz)(1s_A) + (+1)\hat{\sigma}_v(yz)(1s_A) \\
&\propto 1s_A - 1s_B - 1s_A + 1s_B = 0
\end{aligned}$$

Lors de la construction d'un diagramme d'OM (que nous verrons Partie 7), on notera les OM par la RI à laquelle elles appartiennent, en minuscule : on parle d'étiquettes de symétrie. Pour finir, on note que cette méthode ne marche pas pour les groupes infinis car  $g = \infty$  mais dans ce cas le problème se résout souvent à la main.

*Remarque importante* : les dégénérescences d'un problème sont la plupart du temps dues à la symétrie (les dégénérescences accidentelles sont très rares). Ainsi, lorsqu'une représentation réductible contient une RI de dimension 2 (ou 3) par exemple, on aura des OM doublement (ou triplement) dégénérées (cf  $\text{CH}_4$  ou  $\text{C}_6\text{H}_6$ ).

*Commentaire* : Si on considère les caractères d'une RI comme un vecteur ligne, le produit scalaire des vecteurs correspondant à deux RI différentes est nul. Les RI sont donc des vecteurs orthogonaux ce qui justifie leur utilisation en tant que base. Mathématiquement, cela s'écrit  $\sum_{i=1}^k g_i \chi_u^*(R_i) \chi_v(R_i) = g \delta_{uv}$  où  $g_i$  est la dimension de la classe de l'opération  $R_i$ . Le  $*$  est le complexe conjugué (certains groupes ont des caractères complexes). Ce résultat est une conséquence du GTO.

## 6.6 Exemple : orbitales moléculaires du système $\pi$ du benzène

Voyons une utilisation concrète de la théorie des groupes. On va construire le diagramme d'OM du système  $\pi$  de la molécule de benzène dans sa géométrie d'équilibre. On utilise la stratégie proposée au début de la Partie 6.4. La géométrie est fixée, on cherche donc le groupe ponctuel de symétrie et on utilise l'organigramme présenté Figure 11 : la molécule ne fait pas partie d'un groupe spécial, elle a un axe propre d'ordre 6 et six axes de rotation  $\text{C}_2$  perpendiculaires à  $\text{C}_6$ , et elle a aussi un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe  $\text{C}_6$  (le plan de la molécule) : la molécule appartient donc au groupe ponctuel de symétrie  $\text{D}_{6h}$ .

Vu ce qu'on cherche à établir, on prend comme base les orbitales  $2p_z$  de chaque atome de carbone (l'axe  $z$  étant l'axe  $\text{C}_6$ ). On établit ensuite la représentation réductible (on rappelle que pour faire cela, on regarde comment est transformé chaque élément de la base par rapport à lui-même, et on fait la somme) :

| $\text{D}_{6h}$ | E | $2\text{C}_6$ | $2\text{C}_3$ | $\text{C}_2$ | $3\text{C}'_2$ | $3\text{C}''_2$ | i | $2\text{S}_3$ | $2\text{S}_6$ | $\sigma_h$ | $3\sigma_d$ | $3\sigma_v$ |
|-----------------|---|---------------|---------------|--------------|----------------|-----------------|---|---------------|---------------|------------|-------------|-------------|
| $\Gamma_{2p_z}$ | 6 | 0             | 0             | 0            | -2             | 0               | 0 | 0             | 0             | -6         | 0           | 2           |

On a ici pris comme convention les axes  $\text{C}'_2$  et les plans  $\sigma_v$  comme passant par deux atomes et les axes  $\text{C}''_2$  et les plans  $\sigma_d$  comme passant par le milieu de liaisons. Il nous reste à réduire cette représentation. Dans le groupe  $\text{D}_{6h}$  il y a 12 RI. En cas de

doutes, on applique la formule de réduction présentée Partie 6.4, mais on va simplifier la résolution car la base qu'on considère est constituée d'orbitales antisymétriques par rapport au plan  $\sigma_h$ . Les caractères des RI qui apparaîtront dans la réduction pour cette opération doivent donc être strictement négatifs. Il ne reste donc plus à considérer que  $B_{1g}$ ,  $B_{2g}$ ,  $E_{1g}$ ,  $A_{1u}$ ,  $A_{2u}$  et  $E_{2u}$  (cf Partie 16 pour la table de caractères). On utilise alors la formule de décomposition des RR et on trouve :

$$\Gamma_{2p_z} = B_{2g} \oplus A_{2u} \oplus E_{1g} \oplus E_{2u}$$

Il faut toujours vérifier que la somme des dimensions des RI est bien égale à la dimension de la base, ce qui est notre cas ici ( $6 = 1 + 1 + 2 + 2$ ). Pour l'instant, on sait donc qu'il existe une base telle que dans cette base les matrices de toutes les opérations de symétrie de  $D_{6h}$  s'écrivent sous forme diagonale par bloc, avec deux blocs de dimension 1 puis deux blocs de dimension 2. De plus, comme des RI de dimension 2 apparaissent deux fois, on aura deux blocs d'OM deux fois dégénérées.

Nous allons maintenant chercher la base dont nous avons parlé. On utilise la formule de projection présentée Partie 6.5. Les orbitales de la base sont toutes équivalentes. On va donc commencer par projeter  $2p_{z1}$  (qu'on notera juste  $p_1$ ) sur les différents RI. Dans le cas des RI de dimensions supérieures à 1, il faut projeter plus d'une orbitale pour trouver une base (il faut deux combinaisons linéaires non liés pour les RI E, et trois pour les RI T); mais comme les orbitales de la base sont équivalentes, une fois qu'on a projeté  $p_1$ , une permutation circulaire permet de trouver la projection des autres orbitales ( $p_2$  par exemple).

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(A_{2u})}(p_1) &\propto p_1 + p_2 + p_6 + p_3 + p_5 + p_4 - (-p_1) - (-p_3) - (-p_5) - (-p_2) - (-p_4) \\ &\quad - (-p_6) - (-p_4) - (-p_3) - (-p_5) - (-p_2) - (-p_6) - (-p_1) + p_2 \\ &\quad + p_4 + p_6 + p_1 + p_3 + p_5 \propto \mathbf{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6} \\ \hat{P}^{(B_{2g})}(p_1) &\propto p_1 - p_2 - p_6 + p_3 + p_5 - p_4 - (-p_1) - (-p_3) - (-p_5) + (-p_2) + (-p_4) \\ &\quad + (-p_6) + (-p_4) - (-p_3) - (-p_5) + (-p_2) + (-p_6) - (-p_1) - p_2 \\ &\quad - p_4 - p_6 + p_1 + p_3 + p_5 \propto \mathbf{p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - p_6} \\ \hat{P}^{(E_{1g})}(p_1) &\propto 2.p_1 + p_2 + p_6 - p_3 - p_5 - 2.p_4 + 2.(-p_4) + (-p_3) + (-p_5) - (-p_2) \\ &\quad - (-p_6) - 2.(-p_1) \propto \mathbf{2.p_1 + p_2 - p_3 - 2.p_4 - p_5 + p_6} \\ \hat{P}^{(E_{2u})}(p_1) &\propto 2.p_1 - p_2 - p_6 - p_3 - p_5 + 2.p_4 - 2.(-p_4) + (-p_3) + (-p_5) + (-p_2) \\ &\quad + (-p_6) - 2.(-p_1) \propto \mathbf{2.p_1 - p_2 - p_3 + 2.p_4 - p_5 - p_6} \\ \hat{P}^{(E_{1g})}(p_2) &\propto \mathbf{2.p_2 + p_3 - p_4 - 2.p_5 - p_6 + p_1} \\ \hat{P}^{(E_{2u})}(p_2) &\propto \mathbf{2.p_2 - p_3 - p_4 + 2.p_5 - p_6 - p_1} \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé six orbitales de symétrie qui correspondent à ce qu'on cherchait (il ne reste plus qu'à les normaliser). Nous allons cependant un peu modifier le résultat car les orbitales bases de  $E_{1g}$  et  $E_{2u}$  que nous avons obtenu ne sont pas orthogonales et ne peuvent donc pas être des orbitales moléculaires. On va prendre la somme et la différence de ce qu'on a obtenu : comme  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ , si  $a$  et  $b$  ont même normes, prendre la somme et la différence de deux vecteurs donne des vecteurs orthogonaux (qu'on devrait normalement multiplier par un facteur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  pour

garder des orbitales normées). Ici, les orbitales dont on fait la somme et la différence ont mêmes normes, on peut donc les normer après avoir fait les combinaisons linéaires.

$$\begin{aligned}\hat{P}^{(E_{1g})}(p_1) + \hat{P}^{(E_{1g})}(p_2) &\propto p_1 + p_2 - p_4 - p_5 \\ \hat{P}^{(E_{1g})}(p_1) - \hat{P}^{(E_{1g})}(p_2) &\propto p_1 - p_2 - 2.p_3 - p_4 + p_5 + 2.p_6 \\ \hat{P}^{(E_{2u})}(p_1) + \hat{P}^{(E_{2u})}(p_2) &\propto p_1 + p_2 - 2.p_3 + p_4 + p_5 - 2.p_6 \\ \hat{P}^{(E_{2u})}(p_1) - \hat{P}^{(E_{2u})}(p_2) &\propto p_1 - p_2 + p_4 - p_5\end{aligned}$$

Ces orbitales sont aussi bases de  $E_{1g}$  et  $E_{2u}$  respectivement, mais elles correspondent maintenant à des OM (tout comme les orbitales bases de  $A_{2u}$  et  $B_{2g}$  que nous avons obtenu). On peut donc les représenter sur un diagramme énergétique qu'on remplit avec six électrons (cf Figure 13, où les énergies sont obtenues avec la méthode de Hückel). On constate qu'on a bien deux blocs d'OM deux fois dégénérées.

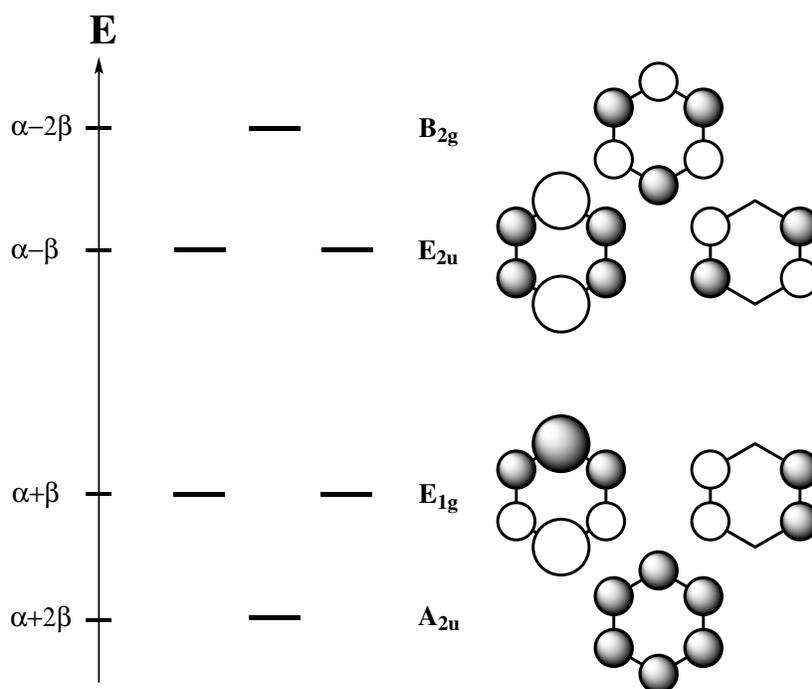


FIGURE 13 – Diagrammes d'OM de la molécule de benzène.

Trouver des orbitales de symétrie est en général long et fastidieux si on utilise la méthode des projecteurs. C'est celle à utiliser en cas de doutes ou pour vérifier un résultat intuitif, mais on essaye le plus souvent de deviner le résultat. Revenons à la décomposition de la représentation en somme de RI :  $\Gamma_{2p_z} = B_{2g} \oplus A_{2u} \oplus E_{1g} \oplus E_{2u}$ . On peut se douter qu'une des orbitales va être la somme entièrement liante des orbitales de la base, et qu'une autre va être la somme antiliante de ces orbitales. S'il y a un doute pour savoir laquelle sera  $A_{2u}$  et laquelle sera  $B_{2g}$ , on prend une des orbitales moléculaires supposées, et on regarde son caractère pour chaque opération de symétrie (en regardant comment les opérations de symétrie transforment l'OM). Par définition, une orbitale de symétrie  $A_{2u}$  aura exactement les mêmes caractères que  $A_{2u}$  dans la table de caractère du groupe : c'est donc un moyen de vérification

très rapide. Une autre façon de procéder est de regarder les 3<sup>èmes</sup> et 4<sup>èmes</sup> blocs des tables de caractères. On y voit que  $A_{2u}$  est de symétrie  $T_z$ , ce qui signifie que les orbitales  $A_{2u}$  vont avoir le plan  $xy$  comme plan d'antisymétrie, et changeront de signe par passage du plan : c'est le cas des orbitales  $p_i$  et ce sera donc le cas de la somme de ces orbitales. On peut aussi se servir du fait que  $E_{1g}$  a la même symétrie que  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $xz$  et  $yz$  même si c'est un peu plus délicat à voir.

La théorie des groupes est donc beaucoup une affaire d'intuition, et pour acquérir de l'intuition, il faut s'y exercer.

## 6.7 Produit direct

On appelle produit direct de deux représentations U et V la représentation dont les caractères pour chaque opération de symétrie sont égaux aux produits des caractères de U et de V. Pour le groupe  $C_{2v}$  par exemple, on a :

| $C_{2v}$    | E   | $C_2(z)$ | $\sigma_v(xz)$ | $\sigma'_v(yz)$ |
|-------------|-----|----------|----------------|-----------------|
| $A_1$       | +1  | +1       | +1             | +1              |
| $A_2$       | +1  | +1       | -1             | -1              |
| $B_1$       | +1  | -1       | +1             | -1              |
| $B_2$       | +1  | -1       | -1             | +1              |
| $A_1 * A_2$ | +1  | +1       | -1             | -1              |
| $B_1 * B_2$ | +1  | +1       | -1             | -1              |
| $B_1 * B_1$ | +1  | +1       | +1             | +1              |
| ...         | ... | ...      | ...            | ...             |

On a donc par exemple :  $A_2 = A_1 * A_2 = B_1 * B_2$ . De manière générale, pour toute RI U de dimension 1, on a  $U = A_1 * U$  et  $U * U = A_1$ . Lorsqu'on fait intervenir des RI de dimensions 2 ou 3 dans un produit direct, on peut parfois le décomposer : dans le groupe  $C_{3v}$ ,  $E * E = A_1 + A_2 + E$  par exemple. On se sert beaucoup des produits directs en spectroscopie pour déterminer des règles de selection en considérant l'intensité de la transition.

## 6.8 Compléments

Concluons cette partie par quelques propriétés ou remarques :

- On ne trouve de RI de dimension 2 que si la molécule possède un axe de rotation (propre ou impropre) d'ordre 3 ou plus ; on ne trouve des RI de dimension 3 que pour  $T_d$ ,  $O$ ,  $O_h$ ,  $I$  ou  $I_h$ .
- Pour les groupes  $\infty$ , on utilise pour des raisons historiques les labels  $\Sigma$ ,  $\Pi$ ,  $\Delta$ ,  $\Phi$  (et pas A, B, E, T) qui correspondent aux valeurs du nombre quantique associé au moment angulaire orbital électronique (0, 1, 2, 3...).
- Le nombre de type de symétries est égal au nombre de classes de symétries : les tables de caractères sont donc toutes carrées (une conséquence du GTO).
- Si le groupe G possède  $k$  RI de dimensions  $n_i$ , alors  $g = \sum_{i=1}^k n_i^2$  (une conséquence du GTO).
- La somme des carrés des caractères dans chacune des RI d'un groupe est égal à l'ordre du groupe :  $g = \sum_{k=1}^g \chi_\mu(R)^2$  (une conséquence du GTO).

## 7 Construction d'orbitales moléculaires

On se place dans le cadre des approximations considérées à la Partie 5 : approximation de Born-Oppenheimer (les électrons s'adaptent instantanément à la position des noyaux), approximation orbitale (la fonction d'onde poly-électronique est écrite comme un produit de fonctions mono-électroniques qu'on appelle orbitales moléculaires) et combinaison linéaire d'orbitales atomiques (les OM sont des combinaisons linéaires des OA). Seule l'écriture sous forme de déterminant de Slater n'est pas prise en compte (cela ne changerait rien aux résultats, mais compliquerait les écritures), et on écrit la fonction d'onde conformément à l'approximation orbitale.

### 7.1 Interaction de deux orbitales identiques

On va considérer le cas de  $H_2$  où deux orbitales  $1s$  interagissent. Ces orbitales ont même forme et même énergie, et on les suppose de même phase. On pourra aussi utiliser le même type de raisonnement si on s'intéresse au système  $\pi$  de l'éthylène (où deux orbitales  $2p_z$  interagissent).

#### 7.1.1 Densité électronique

On écrit les OM sous la forme :  $\phi = c_1\chi_1 + c_2\chi_2$ . On a alors :

$$\langle\phi|\phi\rangle = 1 = c_1^2\langle\chi_1|\chi_1\rangle + c_2^2\langle\chi_2|\chi_2\rangle + 2c_1c_2\langle\chi_1|\chi_2\rangle$$

On rappelle que  $\langle\chi_1|\chi_1\rangle = \langle\chi_2|\chi_2\rangle = 1$ . On appelle *recouvrement* (noté  $S$ ) le terme  $S_{12} = \langle\chi_1|\chi_2\rangle$ , avec  $0 \leq S \leq 1$ . L'intégration de la densité électronique s'écrit donc :

$$\langle\phi|\phi\rangle = 1 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2S_{12}$$

$S$  représente à quel point les nuages électroniques de deux OA se superposent et donc à quel point les électrons pourront se délocaliser. Il ne peut y avoir une interaction que si les nuages électroniques se recouvrent et donc si  $S \neq 0$ .

#### 7.1.2 Orbitales moléculaires

Le terme  $c_1^2$  représente la densité électronique autour de l'atome **1**, il est donc lié à ce qui se passe autour de **1** ; il en est de même pour  $c_2^2$  qui représente ce qui se passe autour de l'atome **2**. Or le problème étant symétrique, ce qui se passe autour de **1** doit se passer autour de **2**. On a donc  $c_1^2 = c_2^2$ , i.e.  $c_1 = \pm c_2$ , et on trouve deux OM :

$$\begin{aligned}\varphi_+ &= N_+(\chi_1 + \chi_2) \\ \varphi_- &= N_-(\chi_1 - \chi_2)\end{aligned}$$

En utilisant la condition de normalisation  $\langle\varphi_+|\varphi_+\rangle = 1$ , on trouve :

$$N_+^2(\langle\chi_1|\chi_1\rangle + \langle\chi_2|\chi_2\rangle + 2\langle\chi_1|\chi_2\rangle) = 1 \quad \text{d'où :} \quad N_+ = \frac{1}{\sqrt{2(1+S)}}$$

Et de la même façon on trouve :

$$N_- = \frac{1}{\sqrt{2(1-S)}}$$

On a donc pu obtenir une écriture mathématique des deux OM. On les représente par des schémas avec les OA où la taille relative de chaque OA représente la valeur absolue du coefficient de l'OA dans l'écriture de l'OM. On représente aussi les variations de signe de l'OM (comme pour les OA, qu'on suppose être en phases i.e. elles ont même signe). On représente donc  $\varphi_+$  et  $\varphi_-$  comme sur la Figure 14. Ici les deux coefficients sont égaux en valeur absolue dans chaque OM et les OA ont donc la même taille dans chaque OM. Cependant, entre les deux OM, la valeur du coefficient n'est pas la même ( $\frac{1}{\sqrt{2(1+S)}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{2(1-S)}}$ ) et donc les lobes de  $\varphi_-$  sont plus gros que ceux de  $\varphi_+$ .



FIGURE 14 – Représentation schématique des orbitales moléculaires de  $H_2$ .

De plus, on peut vérifier que les orbitales moléculaires sont orthogonales :

$$\begin{aligned}\langle \varphi_+ | \varphi_- \rangle &= N_+ N_- (\langle \chi_1 + \chi_2 | \chi_1 - \chi_2 \rangle) \\ &= N_+ N_- (\langle \chi_1 | \chi_1 \rangle - \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle + \langle \chi_2 | \chi_1 \rangle - \langle \chi_2 | \chi_2 \rangle) \\ &= 0\end{aligned}$$

### 7.1.3 Énergie

On utilise l'équation de Schrödinger :  $\hat{h}\varphi_+ = E_+\varphi_+$ . On va noter  $\alpha_1 = h_{11} = \langle \chi_1 | \hat{h} | \chi_1 \rangle$ ,  $\alpha_2 = h_{22} = \langle \chi_2 | \hat{h} | \chi_2 \rangle$  et  $h_{12} = \beta_{12} = \langle \chi_1 | \hat{h} | \chi_2 \rangle$ . Ces notations sont les mêmes que celles de la méthode de Hückel que nous verrons Partie 8 ; en particulier,  $\alpha$  représente l'énergie de l'orbitale dans l'atome isolé et  $\beta$  représente la force de la liaison ( $\beta$  est liée à  $S$ ). On a ici  $\alpha_1 = \alpha_2$ . On trouve en projetant sur  $\langle \varphi_+ |$  :

$$\begin{aligned}E_+ &= \frac{\langle \varphi_+ | \hat{h} | \varphi_+ \rangle}{\langle \varphi_+ | \varphi_+ \rangle} \\ &= \frac{1}{2(1+S)} (\langle \chi_1 + \chi_2 | \hat{h} | \chi_1 + \chi_2 \rangle) \\ &= \frac{\alpha_1 + \beta_{12}}{1+S}\end{aligned}$$

De la même façon on trouve :

$$E_- = \frac{\alpha_1 - \beta_{12}}{1-S}$$

### 7.1.4 Densité électronique des orbitales moléculaires

Dans l'orbitale  $\varphi_+$ , les deux coefficients sont de même signe : les OA sont dites en phase. Pour un point proche de **1** et loin de **2**, l'amplitude de  $\chi_2$  est faible, et donc la densité électronique ressemblera à celle autour de  $\chi_1$  isolé. Il en est de même pour un point proche de **2** et loin de **1** : la densité ressemblera à celle autour de  $\chi_2$  isolé. Par contre dans la région internucléaire,  $\chi_1$  et  $\chi_2$  ont des valeurs comparables, et on ne peut pas négliger l'une devant l'autre : les densités électroniques s'y ajoutent et la densité électronique ne ressemble plus à celle des OA seules (cf Figure 15-(a)).

$$\varphi_+^2 = \frac{1}{2(1+S)} (\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\chi_1\chi_2)$$

Pour  $\varphi_-$ , les coefficients sont opposés et les OA sont dites en opposition de phase : si on est proche des atomes, cela se passera comme pour  $\varphi_+$ , mais dans la région internucléaire les amplitudes se soustraient et la densité électronique s'annule pour des points équidistants de **1** et **2**. On a donc un plan nodal dans  $\varphi_-$  (cf Figure 15-(b)).

$$\varphi_-^2 = \frac{1}{2(1-S)} (\chi_1^2 + \chi_2^2 - 2\chi_1\chi_2)$$

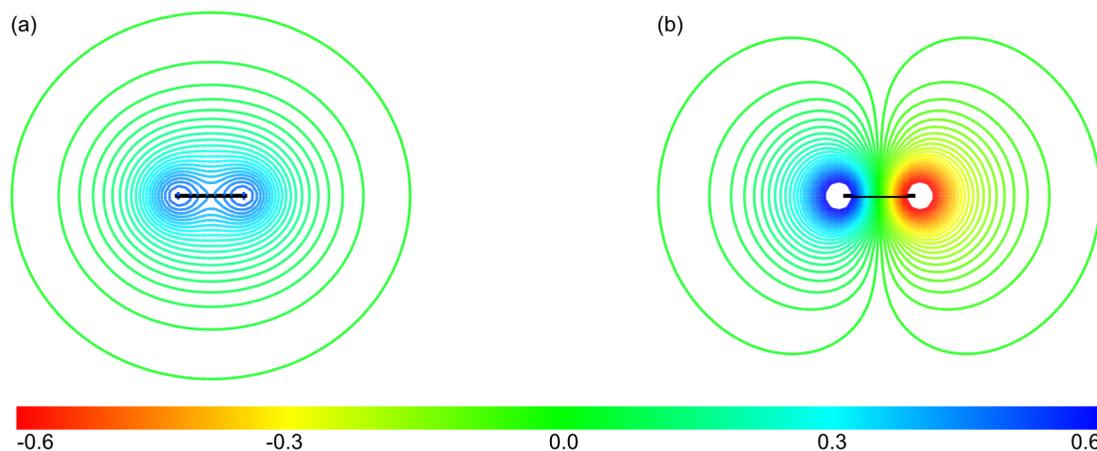


FIGURE 15 – Courbes d'isodensité des OM de  $H_2$  (même échelle, autant de courbes).

On représente Figure 16 l'évolution de la densité électronique de  $H_2$  avec la distance, quand on passe les deux hydrogènes de 4, 5 Å à la distance d'équilibre (0, 74 Å). On peut y voir que plus on rapproche les deux atomes (et donc plus le recouvrement devient important), plus la densité électronique est modifiée (le code couleur est différent entre les Figures 15 et 16 car la gamme de valeurs change, mais l'image de la Figure 15 à gauche est équivalente à celle de la Figure 16 à 0, 74 Å).

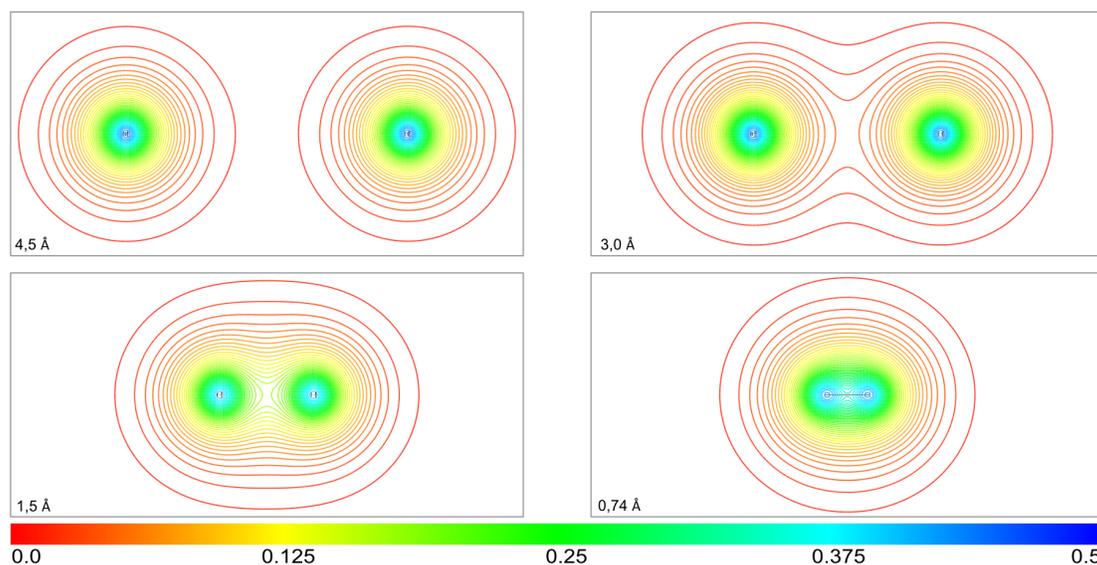


FIGURE 16 – Évolution de la densité électronique de  $H_2$  avec la distance H–H.

### 7.1.5 Orbitales moléculaires liantes et antiliantes

Un électron dans une orbitale  $\varphi_+$  aura, nous l'avons vu, une certaine densité de probabilité entre les noyaux. Or la liaison chimique résulte *de la possibilité qu'a le nuage électronique à se délocaliser entre les noyaux*. La densité internucléaire aura donc tendance à attirer les noyaux et à stabiliser l'électron en le délocalisant<sup>12</sup> : un électron dans une OM  $\varphi_+$  aura donc une énergie inférieure à celle qu'il avait dans  $\chi_1$  ou  $\chi_2$ . L'OM est donc dite liante car elle stabilise le système, et elle est d'autant plus liante que le recouvrement  $S$  est grand. **Dans le cas du dihydrogène, on peut directement assimiler la liaison chimique à l'orbitale liante.**

Un électron de l'OM  $\varphi_-$  a quant à lui une faible probabilité de se trouver dans l'espace entre les noyaux : l'OM a une énergie supérieure à celle de  $\chi_1$  ou de  $\chi_2$  car l'électron peut moins se délocaliser : on lui interdit certaines régions de l'espace (le plan nodal). L'OM est dite antiliante. On note parfois les OM antiliantes avec une \* en exposant (ainsi si la liante est notée  $\sigma$ , l'antiliante sera notée  $\sigma^*$ ). On utilise également beaucoup la notation des OM par étiquette de symétrie.

### 7.1.6 Diagrammes d'interaction

On représente l'interaction des deux orbitales  $1s$  sur un diagramme énergétique (cf Figure 17). On définit  $\Delta E_+ = E_+ - \alpha_1$  et  $\Delta E_- = E_- - \alpha_1$ .

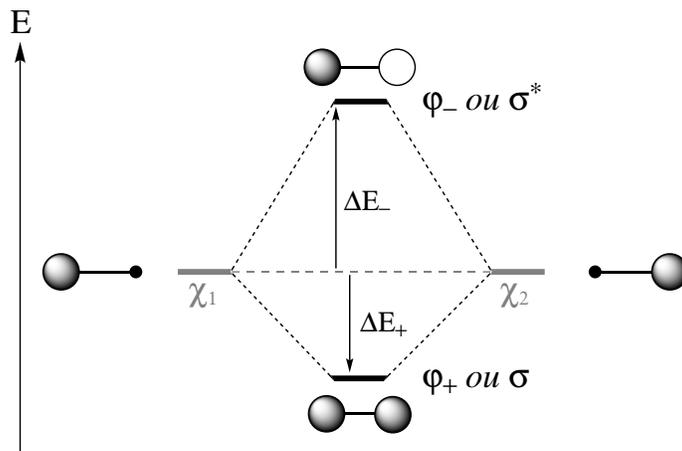


FIGURE 17 – Diagramme énergétique des OM de  $H_2$ .

$\Delta E_+$  représente l'énergie de stabilisation de l'OM  $\varphi_+$  par rapport à  $\chi_1$  et  $\chi_2$  et  $\Delta E_-$  l'énergie de déstabilisation de l'OM  $\varphi_-$  par rapport à  $\chi_1$  et  $\chi_2$ . On a donc :

$$\Delta E_+ = \frac{\alpha_1 + \beta_{12}}{1 + S} - \alpha_1 = \frac{\beta_{12} - \alpha_1 S}{1 + S}$$

$$\Delta E_- = \frac{\alpha_1 - \beta_{12}}{1 - S} - \alpha_1 = \frac{-\beta_{12} + \alpha_1 S}{1 - S}$$

Comme  $0 \leq S \leq 1$ , on a  $\frac{1}{1+S} \leq \frac{1}{1-S}$ . On a donc  $|\Delta E_+| < |\Delta E_-|$ . C'est une propriété importante : *la déstabilisation est toujours plus importante que la stabilisation*. Le

12. On peut faire un parallèle avec les formes mésomères : plus on peut écrire de formes mésomères d'une structure, plus les électrons se délocalisent, plus le système sera stable.

recouvrement  $S$  a une grande importance ici : en effet,  $\beta$  et  $S$  sont liés (on peut considérer en première approximation qu'ils sont proportionnels si  $S \neq 0$ ).  $\Delta E_+$  et  $\Delta E_-$  sont donc proportionnels à  $S$ . Si  $S = 0$ , les orbitales  $\sigma$  et  $\sigma^*$  sont symétriques par rapport au niveau énergétique de  $\chi_1$  et  $\chi_2$ .

### 7.1.7 Remplissage

On cherche à connaître la structure électronique des molécules : les électrons sont décrits par des OM d'énergie croissante (comme pour les OA). Une OM peut décrire (ou "contenir") au maximum deux électrons (principe de Pauli), qui ont alors des spins opposés (Figure 18). En faisant ainsi, on "remplit" le diagramme d'OM. On peut rencontrer plusieurs cas qui font interagir deux orbitales  $1s$  identiques :

- 2 électrons ( $H_2$  par ex) : le système est alors stabilisé de  $2\Delta E_+$  et la molécule existe (pour  $H_2$ , la stabilisation est de 435 kJ/mol) ;
- 1 électron ( $H_2^+$  par ex) : le système est stabilisé, mais seulement de  $\Delta E_+$  i.e. moins que pour le cas à deux électrons. Cela se traduit par l'énergie de dissociation de  $H_2^+$  qui vaut 259 kJ/mol. De plus, la distance H–H à l'équilibre vaut 106pm pour  $H_2^+$  et 74pm pour  $H_2$  : il y a moins d'électrons entre les noyaux, ils sont donc moins attirés l'un vers l'autre et le recouvrement  $S$  est plus faible ;
- 3 électrons ( $H_2^-$  par ex) : la variation d'énergie vaut  $\Delta E_- + 2\Delta E_+$ . Cette valeur est négative pour l'hydrogène (la stabilisation vaut 268 kJ/mol),  $H_2^-$  peut donc exister. Dans d'autres cas, la variation pourra être positive : le système ne sera pas stable avec trois électrons et restera sous forme de fragments ;
- 4 électrons ( $H_2^{2-}$  ou  $He_2$  par ex) : le système n'est jamais stable car la variation d'énergie vaut  $2\Delta E_- + 2\Delta E_+$  et  $|\Delta E_+| < |\Delta E_-|$  :  $He_2$  et  $H_2^{2-}$  n'existent pas.

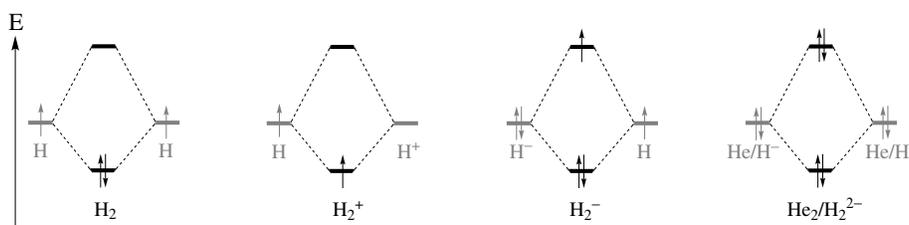


FIGURE 18 – Remplissage de quelques molécules diatomiques simples.

### 7.1.8 Méthode alternative

Nous allons présenter une autre méthode pour trouver les énergies. On écrit l'équation de Schrödinger qu'on projette sur  $\langle \phi |$ , et on développe  $\langle \phi | \hat{h} | \phi \rangle = E \langle \phi | \phi \rangle$  :

$$c_1^2 h_{11} + 2c_1 c_2 h_{12} + c_2^2 h_{22} = E(c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 S)$$

On applique ensuite le principe variationnel. L'énergie dépend de  $c_1$  et  $c_2$ , on va donc dériver l'expression précédente par rapport à  $c_1$  et  $c_2$ , et chercher les conditions pour que les dérivées s'annulent. On commence par dériver par rapport à  $c_1$  :

$$2c_1 h_{11} + 2c_2 h_{12} = \underbrace{\frac{\partial E}{\partial c_1}}_{=0} (c_1^2 + 2c_1 c_2 S + c_2^2) + E(2c_1 + 2c_2 S)$$

ce qui se ré-écrit :  $c_1(h_{11} - E) + c_2(h_{12} - ES) = 0$   
 En faisant de même avec  $c_2$ , on trouve :  $c_1(h_{12} - ES) + c_2(h_{22} - E) = 0$

On retrouve les équations séculaires avec le système :

$$\begin{pmatrix} h_{11} - E & h_{12} - ES \\ h_{12} - ES & h_{22} - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

Il faut donc annuler le déterminant de ce système. Or  $h_{11} = h_{22} = \alpha_1$ , on a alors :

$$(\alpha_1 - E)^2 - (\beta_{12} - ES)^2 = 0 \quad \text{d'où : } \alpha_1 - E = \pm(\beta_{12} - ES) \quad \text{et donc : } E_{\pm} = \frac{\alpha_1 \pm \beta_{12}}{1 \pm S}$$

C'est exactement ce que nous avons trouvé précédemment. On utilise alors les deux équations  $c_1(\alpha_1 - E) + c_2(\beta_{12} - ES) = 0$  et  $c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2S = 1$ , et en posant  $E = E_+$  puis  $E = E_-$  on trouve la forme des orbitales moléculaires. On a donc une deuxième méthode pour trouver les orbitales et énergies de  $H_2$ .

## 7.2 Interaction de deux orbitales différentes

On va ici regarder le cas de LiH pour l'exemple, en prenant en compte l'orbitale  $1s$  de l'hydrogène (atome **1**), et seulement l'orbitale  $2s$  du lithium (atome **2**) alors qu'en général, on prend aussi en compte les  $2p$ . On rappelle que les électronégativités de H et Li sont respectivement 2,1 et 1,0, donc l'énergie de la  $1s$  de H est inférieure à celle de la  $2s$  de Li ( $\alpha_H = -13,6eV$  et  $\alpha_{Li} = -5,4eV$ ) ; l'énergie de la  $2p$  de Li est quant à elle de  $-3,5eV$ . Nous en verrons plus tard la justification, mais nous négligeons l'interaction entre la  $1s$  de H et les  $2p$  de Li (on peut aussi considérer qu'on étudie HeH, avec  $\alpha_{He} = -24,6eV$ ). Le problème n'est plus symétrique, et on ne peut donc plus dire  $c_1 = \pm c_2$ . On écrit toujours  $\phi = c_1\chi_1 + c_2\chi_2$ , et on projette l'équation de Schrödinger ( $\hat{h}\phi = E\phi$ ) sur  $\langle\chi_1|$  :

$$c_1\langle\chi_1|\hat{h}|\chi_1\rangle + c_2\langle\chi_1|\hat{h}|\chi_2\rangle = E(c_1\langle\chi_1|\chi_1\rangle + c_2\langle\chi_1|\chi_2\rangle)$$

$$\text{d'où : } c_1(h_{11} - E) + c_2(h_{12} - ES) = 0$$

Si on projette sur  $\langle\chi_2|$ , on trouve :

$$c_1(h_{12} - ES) + c_2(h_{22} - E) = 0$$

On retrouve encore les équations séculaires, avec le système :

$$\begin{pmatrix} h_{11} - E & h_{12} - ES \\ h_{12} - ES & h_{22} - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

On peut démontrer que projeter sur une orbitale revient à appliquer le principe variationnel, c'est pour cela qu'on retrouve les mêmes équations. Si  $\chi_1 = \chi_2$  (cas de  $H_2$ ) on retrouve ce qu'on a vu Partie 7.1.8. On a donc ici une troisième façon de présenter la construction des orbitales de  $H_2$  et la détermination de leurs énergies. Mais restons sur le cas de LiH : on note  $h_{11} = \alpha_H$ ,  $h_{22} = \alpha_{Li}$  et enfin  $\beta = h_{12}$ . Là aussi on annule le déterminant, et il faut donc résoudre :

$$\begin{vmatrix} \alpha_H - E & \beta - ES \\ \beta - ES & \alpha_{Li} - E \end{vmatrix} = 0$$

On a  $\alpha_H < \alpha_{Li}$ . On fait interagir deux OA, on va donc obtenir deux OM. On note  $E_+$  l'énergie de l'OM la plus basse en énergie et  $E_-$  celle de la plus haute. On définit  $\Delta E_+ = E_+ - \alpha_H$  et  $\Delta E_- = E_- - \alpha_{Li}$  :  $\Delta E_+$  représente à nouveau l'énergie de stabilisation et  $\Delta E_-$  l'énergie de déstabilisation, mais pas par rapport aux mêmes références. On se place d'abord dans le cas  $E = E_+$  et le déterminant devient alors :

$$\begin{vmatrix} -\Delta E_+ & \beta - (\Delta E_+ + \alpha_H)S \\ \beta - (\Delta E_+ + \alpha_H)S & \alpha_{Li} - (\Delta E_+ + \alpha_H) \end{vmatrix} = 0$$

On fait ensuite l'hypothèse que  $\{|\Delta E_+|, |\Delta E_-|\} \ll \{|\alpha_H|, |\alpha_{Li}|, |\alpha_H - \alpha_{Li}|\}$  :

$$\begin{vmatrix} -\Delta E_+ & \beta - (\cancel{\Delta E_+} + \alpha_H)S \\ \beta - (\cancel{\Delta E_+} + \alpha_H)S & \alpha_{Li} - (\cancel{\Delta E_+} + \alpha_H) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{d'où : } \begin{vmatrix} -\Delta E_+ & \beta - \alpha_H S \\ \beta - \alpha_H S & \alpha_{Li} - \alpha_H \end{vmatrix} = 0$$

On trouve donc en ré-écrivant le déterminant qui a été développé :

$$\Delta E_+ = E_+ - \alpha_H \approx \frac{(\beta - \alpha_H S)^2}{\alpha_H - \alpha_{Li}} < 0 \quad \text{et on constate que : } \Delta E_+ \propto \frac{S^2}{\Delta \varepsilon}$$

Ce terme étant négatif, l'orbitale associée est stabilisée par rapport à  $\alpha_H$ . Dans le cas  $E = E_-$ , on utilise  $\Delta E_-$  et on trouve :

$$\Delta E_- = E_- - \alpha_{Li} \approx \frac{(\beta - \alpha_{Li} S)^2}{\alpha_{Li} - \alpha_H} > 0 \quad \text{et on constate que : } \Delta E_- \propto \frac{S^2}{\Delta \varepsilon}$$

L'orbitale associée est donc déstabilisée par rapport à  $\alpha_{Li}$  puisque ce terme est positif. De plus,  $\alpha_H < \alpha_{Li} < 0$ , d'où :

$$\begin{aligned} 0 &> \beta - \alpha_H S > \beta - \alpha_{Li} S \\ (\beta - \alpha_H S)^2 &< (\beta - \alpha_{Li} S)^2 \\ \frac{(\beta - \alpha_H S)^2}{\alpha_{Li} - \alpha_H} &< \frac{(\beta - \alpha_{Li} S)^2}{\alpha_{Li} - \alpha_H} \\ -\Delta E_+ &< \Delta E_- \end{aligned}$$

**La déstabilisation est donc là aussi plus importante que la stabilisation.** On peut de plus voir qu'on peut considérer (en grosse approximation) que  $E_+$  a l'énergie de  $\alpha_H$  plus une perturbation, et  $E_-$  a l'énergie de  $\alpha_{Li}$  plus une autre perturbation.

L'une des équations du système pour trouver  $\varphi_+$  s'écrit :

$$c_1(-\Delta E_+) + c_2(\beta - \alpha_H S) = 0$$

$$\text{d'où : } \frac{c_1}{c_2} = \frac{\beta - \alpha_H S}{\Delta E_+} = \frac{\alpha_H - \alpha_{Li}}{\beta - \alpha_H S} = \frac{\alpha_{Li} - \alpha_H}{\alpha_H S - \beta} > 0$$

$c_1$  et  $c_2$  sont donc de même signe : l'OM est liante. De plus, on a supposé que  $|\Delta E_+| \ll |\alpha_H - \alpha_{Li}|$ . On trouve donc que :  $(\beta - \alpha_H S)^2 \ll |\alpha_H - \alpha_{Li}|^2$  i.e.  $\frac{c_1^2}{c_2^2} > 1$  d'où  $c_1 > c_2$ . Dans l'orbitale liante, le plus gros coefficient est pour l'OA issu de l'atome

le plus électronégatif (H ici). Comme pour le cas du dihydrogène, la liaison covalente peut être assimilée directement à l'OM  $\sigma$ . Si on mène les calculs pour l'autre OM, on trouve que les coefficients ont des signes opposés (l'OM est donc antiliante), et que le plus gros coefficient (en valeur absolue) est  $c_2$  i.e. celui de l'atome dont l'orbitale est la plus haute en énergie. On retrouve ce qu'on a dit précédemment, à savoir qu'en grosse approximation,  $\varphi_+$  est une perturbation de  $\alpha_H$  et  $\varphi_-$  est une perturbation de  $\alpha_{Li}$ . Tout ceci est illustré Figure 19.

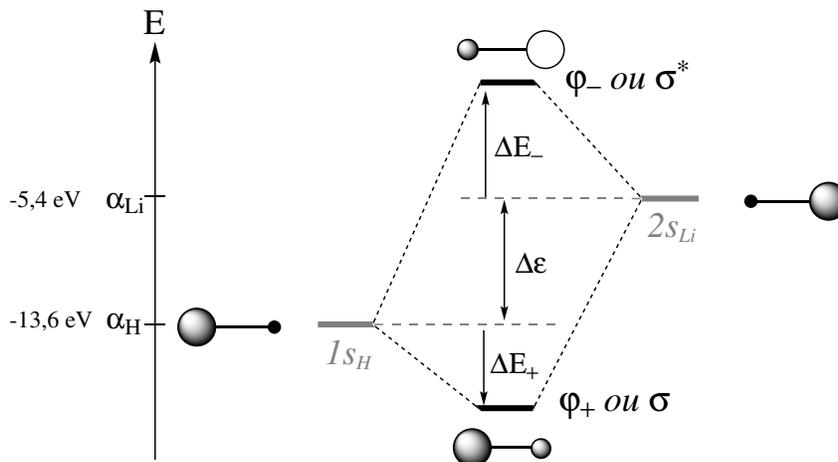


FIGURE 19 – Diagramme d'interaction de LiH.

Pour résumer : on aura toujours une orbitale stabilisée (liante) et une déstabilisée (antiliante). Même quand on fait interagir deux orbitales d'énergies différentes, on a  $|\Delta E_+| < |\Delta E_-|$ . De manière approchée, on peut dire que  $\Delta E_+$  et  $\Delta E_-$  sont proportionnels à  $\frac{S^2}{\Delta \varepsilon}$  puisque  $\beta$  est proportionnelle à  $S$ . Ce résultat n'est valable que pour des orbitales d'énergies différentes pour lesquelles  $\Delta \varepsilon$  est suffisamment grand. Lorsque les orbitales sont proches en énergie, certaines hypothèses faites précédemment pour les calculs ne sont plus valables et donc cette formule n'est plus correcte (et pour des orbitales de même énergie,  $\Delta E_+$  et  $\Delta E_-$  sont proportionnels à  $S$  et c'est ce cas-là qui maximise  $\Delta E_+$  et  $\Delta E_-$ )<sup>13</sup>. De plus, *le coefficient de l'OA la plus basse en énergie dans l'orbitale liante est toujours le plus grand en valeur absolue, de même que le coefficient de l'OA la plus haute en énergie dans l'antiliante*. L'OM liante “ressemble” donc à l'OA de l'atome le plus électronégatif.

### 7.3 Liaisons ioniques

S'il y a une grande différence d'électronégativité entre deux atomes  $A$  et  $B$  au sein d'une molécule  $A - B$  (avec  $\chi(B) > \chi(A)$ ), l'orbitale moléculaire liante sera très proche de l'OA de  $B$  tant en forme qu'en énergie. L'OM antiliante sera quant à elle fortement localisée sur l'atome  $A$ . Lors du remplissage, les deux électrons se localiseront sur l'OM liante. Tout se passera donc comme si l'atome  $A$  perdait un électron et l'atome  $B$  gagnait un électron. La structure de la molécule sera donc bien

13. C'est pour cela qu'on néglige les orbitales de cœur dans le développement LCAO : (1) le recouvrement  $S$  est faible avec les orbitales de valence car elle sont contractées, et (2)  $\Delta \varepsilon$  est grand. C'est aussi une justification pour négliger les  $2p$  du lithium dans LiH. Et si  $\Delta \varepsilon \rightarrow \infty$ , il n'y a plus d'interactions et  $\Delta E_+$  et  $\Delta E_-$  tendent vers 0 : les OM sont alors les OA.

décrite par une forme  $A^+B^-$  et la liaison sera considérée comme ionique (voir Figure 20 où on prend comme exemple deux orbitales  $s$ ).

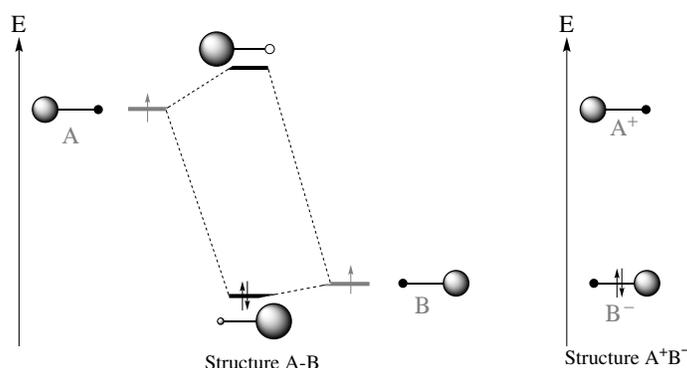


FIGURE 20 – Interaction entre deux atomes aux électronégativités très différentes.

## 7.4 Recouvrement

Pour qu'il y ait interaction entre deux orbitales atomiques, il faut que le recouvrement  $S$  soit non nul<sup>14</sup>. Deux orbitales orthogonales ne pourront donc pas interagir. De manière générale, si par rapport à un quelconque élément de symétrie donnée,  $\chi_i$  est symétrique et  $\chi_j$  est antisymétrique, alors  $\langle \chi_i | \chi_j \rangle = 0$  (**on rappelle que les éléments de symétrie à considérer sont ceux qui laissent la position des noyaux invariants**). Il n'y a donc pas d'interaction possible entre la  $1s$  de H et les  $2p_y$  et  $2p_z$  de Li (en notant  $x$  l'axe de la liaison).

On appellera orbitale  $\sigma$  une orbitale de symétrie de révolution autour de l'axe internucléaire : le recouvrement est alors dit *axial*. Dans le cas où il y a un plan nodal qui contient l'axe de la liaison, et que ce plan est plan d'antisymétrie, on parlera d'orbitale  $\pi$ . Le recouvrement est alors dit *latéral*. De manière générale, un recouvrement axial est plus important qu'un recouvrement latéral. Plusieurs cas sont à considérer (on appelle  $x$  l'axe de la liaison) :

- recouvrement axial non nul (cf Figure 21(a)) : c'est le cas d'orbitales  $ns/ns$ ,  $ns/2p_x$  ou  $2p_x/2p_x$  ;
- recouvrement axial nul (cf Figure 21(b)) : c'est le cas d'orbitales  $ns/2p_y$  ou  $2p_y/2p_x$ , si l'angle entre l'orientation de la  $2p_y$  et l'axe  $x$  est  $90^\circ$  ;
- recouvrement latéral (cf Figure 21(c)) : c'est le cas d'orbitales  $2p_y/2p_y$  ou  $3d_{xy}/2p_y$ .

Dans le cas où il y a un centre d'inversion, on indicera par  $u$  les OM antisymétriques et par  $g$  les OM symétriques (de l'allemand *gerade* et *ungerade*). Attention, ces notations n'ont pas de sens s'il n'y a pas de centre d'inversion.

14. Si  $S = 0$  alors  $\beta = 0$ . En faisant interagir deux orbitales **1** et **2** de recouvrement nul avec  $\alpha_1 < \alpha_2$ , on trouve pour  $\varphi_+$  :  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ ,  $E_+ = \alpha_1$ , et pour  $\varphi_-$  :  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $E_- = \alpha_2$  (ça se retrouve facilement en regardant les équations séculaires). Les "OM" sont donc les OA de départ.

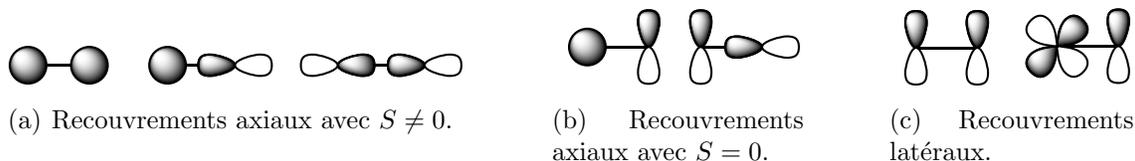


FIGURE 21 – Recouvrements possibles entre orbitales atomiques.

## 7.5 Symétrie

La symétrie permet d'énormément simplifier les problèmes. En effet, on peut montrer que si deux orbitales ont des symétries différentes, leur intégrale de recouvrement sera nulle i.e.  $S = 0$  (ce qu'on a vu Partie 7.4). Dans tout ce qui va suivre (*méthode des fragments* ou *interaction à trois orbitales*), on ne fera donc pas interagir n'importe quelles orbitales ensemble. La raison de ceci est bien expliquée dans un cours de l'Université de Provence, et plutôt que le paraphraser je préfère le citer :

“Considérons par exemple l'intégrale du produit de deux fonctions  $f_A$  et  $f_B$  :  $I = \int f_A f_B d\tau$ . Cette intégrale sera nulle sauf dans le cas où l'intégrand (= le produit  $f_A f_B$ ) est invariant sous l'action de toutes les opérations de symétrie du groupe auquel la molécule appartient. En effet, toute opération de symétrie est équivalente à un changement de référentiel. Le résultat d'une intégration devant être indépendant du référentiel choisi, seul un intégrand invariant conduit à un résultat non nul. Ce résultat est la généralisation d'un cas bien connu où l'intégrand est simplement une fonction à une variable,  $f_A(x)$ . Une intégrale du type :  $\int_{-\infty}^{\infty} f_A(x) dx$  sera nulle si la fonction  $f_A$  est impaire. Dans ce cas, on dit qu'elle n'est pas invariante sous l'action de l'opération d'inversion. Dire que l'intégrand  $f_A f_B$  est invariant sous l'action de toutes les opérations de symétrie revient à dire que cette fonction sert de base pour la représentation totalement symétrique du groupe.”

Pour que l'intégrale  $I$  soit non nulle, il faut donc que  $\Gamma_{f_1 f_2}$  contienne  $A_1$  (un point qu'on oublie de préciser cette citation est qu'il faut considérer  $\Gamma_{f_1 f_2 d\tau}$  mais comme  $\Gamma_{d\tau} = A_1$ , on ne le considère pas) : on décompose donc  $\Gamma_{f_1} * \Gamma_{f_2}$  et on regarde si la réduction contient  $A_1$  ; ce ne sera le cas que si  $\Gamma_{f_1} = \Gamma_{f_2}$  i.e.  $f_1$  et  $f_2$  font parties de la même RI. Tout ceci est une condition nécessaire, mais pas suffisante :  $I$  peut être nulle pour d'autres raisons que la symétrie. On pourra consulter le livre “Chimie Physique” de Atkins qui donne un exemple pour  $\int xy \cdot dx dy$  sur un triangle.

On peut étendre ce résultat au calcul d'éléments de matrice :  $\langle \psi | \hat{P} | \varphi \rangle \neq 0$  si  $\Gamma_{\psi^*} * \Gamma_P * \Gamma_{\varphi}$  contient  $A_1$  ; si  $\hat{P} = \hat{H}$ , comme  $\Gamma_H = A_1$  il y a juste à évaluer  $\Gamma_{\psi^*} * \Gamma_{\varphi}$ . C'est pour cela que les orbitales  $\sigma$  et  $\pi$  ne se mélangent pas : pour une molécule plane, les premières sont symétriques par rapport au plan de la molécule alors que les secondes sont antisymétriques.

## 7.6 Méthode des fragments

Cette méthode consiste à faire interagir un premier lot d'OA entre elles pour obtenir les orbitales d'un premier fragment. Puis on fait interagir les orbitales de fragment

avec le reste ; les orbitales de fragment seront souvent les orbitales de symétrie. Par exemple pour trouver les OM de  $\text{H}_2\text{O}$ , on fait interagir celles de  $\text{H}_2$  avec celles de O. Ou pour obtenir les orbitales de  $\text{CH}_4$ , on cherche celles de  $\text{H}_4$  qu'on fait interagir avec celles de C. L'avantage de cette méthode est qu'en cherchant les orbitales de symétrie de chaque fragment on détermine leurs symétries (!) : on simplifie donc l'interaction entre chaque fragments puisqu'on ne regardera alors que les orbitales de même symétrie.

Ce que nous avons vu précédemment reste valable : *le coefficient du fragment le plus bas en énergie dans l'orbitale liante est toujours le plus grand en valeur absolue, de même que le coefficient du fragment le plus haut en énergie dans l'antiliante. L'OM liante "ressemble" donc au fragment le plus bas en énergie.* Il faudra juste faire attention à comment on décompose les orbitales pour faire les fragments : il ne faudra pas le faire n'importe comment, et il faudra garder les opérations de symétrie de la molécule dans les fragments.

## 7.7 Molécules $\text{AH}_2$ linéaires

Nous commençons notre exploration des diagrammes d'OM de molécules complexes par une molécule de type  $\text{AH}_2$ , où A est un élément de la deuxième ou troisième ligne de la classification périodique. On s'intéresse en premier à la situation où les atomes sont alignés, en prenant  $\text{BeH}_2$  pour l'exemple. On commence par la décomposer en fragments : d'une part  $\text{H}_2$ , d'autre part Be. On aura donc d'une part les orbitales de fragment  $\sigma_{\text{H}_2}$  et  $\sigma_{\text{H}_2}^*$  que nous connaissons déjà, et d'autre part les orbitales de fragment  $2s$ ,  $2p_x$ ,  $2p_y$  et  $2p_z$ .

Dans une molécule  $\text{AH}_2$  linéaire, les deux hydrogènes sont éloignés et le recouvrement entre les orbitales  $1s$  est faible (la distance  $\text{H}\cdots\text{H}$  est de 2,3 Å dans  $\text{BeH}_2$ ) : l'interaction entre les deux orbitales  $1s$  est donc faible et les stabilisations et déstabilisations seront faibles. Les orbitales  $\sigma_{\text{H}_2}$  et  $\sigma_{\text{H}_2}^*$  auront donc une énergie très proche de celle de la  $1s$  isolée (-13,6 eV). Les valeurs énergétiques des  $2s$  et  $2p$  du béryllium sont respectivement de -9,4 eV et -6,0 eV.

Nous avons souligné précédemment l'importance de la symétrie. Si suite à une opération de symétrie quelconque deux orbitales réagissent différemment (l'une étant symétrique et l'autre antisymétrique), alors elles n'interagiront pas. Nous appellerons  $x$  l'axe de la molécule ( $\text{H}-\text{Be}-\text{H}$ ). Les orbitales  $\sigma_{\text{H}_2}$  et  $\sigma_{\text{H}_2}^*$  sont symétriques par rapport à toutes les rotations possibles autour de l'axe  $x$ . Par contre, les orbitales  $2p_y$  et  $2p_z$  sont antisymétriques par rapport à une rotation de  $180^\circ$ . Il n'y aura donc pas d'interactions entre ces deux lots. Si on considère l'inversion (ou la réflexion par rapport à un plan bissecteur de la molécule),  $\sigma_{\text{H}_2}$  et la  $2s$  sont symétriques alors que  $\sigma_{\text{H}_2}^*$  et la  $2p_x$  sont antisymétriques. Au final, nous pouvons écrire que :

- La  $\sigma_{\text{H}_2}$  et la  $2s$  interagiront ensemble pour former une liante et une antiliante.



- La  $\sigma_{H_2}^*$  et la  $2p_z$  interagiront ensemble pour former une liante et une antiliante.



- Les  $2p_x$  et  $2p_y$  n'interagiront avec aucune autre orbitale et seront inchangés.

On peut donc dessiner le diagramme énergétique présenté Figure 22 qui est générique à toutes les molécules  $AH_2$  linéaires. On trouve deux OM liantes, deux antiliantes et deux “non liantes” : on appelle non liantes des OM qui ne contribuent pas (ou peu) aux liaisons en ayant une stabilisation ou une déstabilisation nulle ou très faible. L'OM  $1\sigma_x$  est plus basse que la  $2\sigma_x$  car les OM des fragments initiaux sont plus bas en énergie.

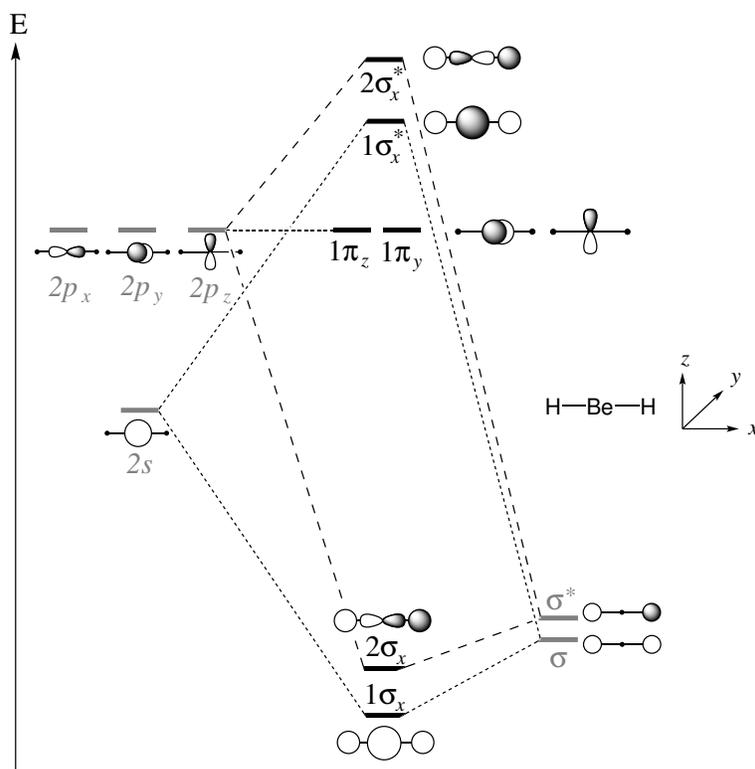


FIGURE 22 – Diagramme d'interaction entre Be et  $H_2$  pour  $BeH_2$  linéaire.

Le béryllium a deux électrons de valence, et chaque hydrogène en a un. Il y a donc quatre électrons à placer sur le diagramme. On en déduit que la configuration électronique à l'état fondamental de  $BeH_2$  est  $(1\sigma_x)^2 (2\sigma_x)^2$ . **Contrairement à ce que nous avons vu pour  $H_2$ , il n'y a pas de correspondance directe entre une liaison chimique du schéma de Lewis et une OM.** Les OM sont délocalisées sur toute la molécule, et chaque OM contribue aux deux liaisons Be–H. Les OM sont symétriques par rapport à Be, donc les OM liantes contribuent autant à chaque liaison, et les deux liaisons Be–H sont ainsi équivalentes (mais les deux OM qui décrivent ces liaisons ne sont pas équivalentes, que ce soit en forme ou en énergie).

## 7.8 Interaction à trois orbitales

Lorsqu'on doit faire interagir deux orbitales ensemble, c'est assez simple : on fait une liante (qui aura un gros coefficient pour le fragment le plus bas en énergie) et une antiliante (qui aura un gros coefficient pour le fragment le plus haut en énergie). Mais il est fréquent qu'il y ait plus de deux orbitales d'une même symétrie à considérer. Dans le cas où il y en a trois, le problème est faisable à la main. On va considérer qu'il y a une orbitale  $\chi_1$  sur un fragment, et deux orbitales  $\chi_2$  et  $\chi_3$  sur l'autre fragment, toutes les trois de même symétrie ( $\chi_2$  et  $\chi_3$  sont orthogonales car OA d'un même fragment). On obtient un schéma d'interaction représenté Figure 23. Les OM

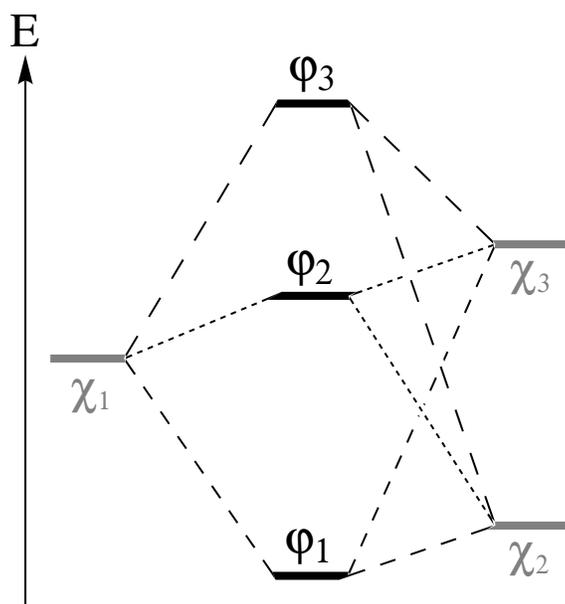


FIGURE 23 – Interaction à trois orbitales.

$\varphi_i$  seront des combinaisons linéaires des fragments  $\chi_i$ . De manière générale, on peut dire que :

- dans  $\varphi_1$ , l'interaction  $\chi_1$ - $\chi_2$  est liante et l'interaction  $\chi_1$ - $\chi_3$  aussi : l'énergie est plus basse que toutes les autres :  $\varphi_1$  est une OM liante ;
- dans  $\varphi_3$ , l'interaction  $\chi_1$ - $\chi_2$  est antiliante et l'interaction  $\chi_1$ - $\chi_3$  aussi : l'énergie est plus haute que toutes les autres :  $\varphi_3$  est une OM antiliante ;
- dans  $\varphi_2$ , l'interaction  $\chi_1$ - $\chi_2$  est antiliante et l'interaction  $\chi_1$ - $\chi_3$  est liante : son énergie est autour de celle de  $\chi_1$ , soit au-dessus, soit au-dessous (en cas d'oubli, on peut le retrouver très facilement : si  $\chi_3$  est absente,  $\varphi_2$  est l'antiliante de l'interaction entre  $\chi_1$  et  $\chi_2$  ; et si  $\chi_2$  est absente,  $\varphi_2$  est la liante de l'interaction entre  $\chi_1$  et  $\chi_3$  ; en présence des deux, on moyenne) :  $\varphi_2$  est une OM non liante.

## 7.9 Molécules $AH_2$ coudées (l'eau)

Nous allons appliquer les résultats précédents à la construction du diagramme d'orbitales moléculaires de la molécule d'eau dans sa géométrie d'équilibre. On commence par la décomposer en fragments : d'une part  $H_2$ , d'autre part O. On aura donc d'une part les orbitales de fragment  $\sigma_{H_2}$  et  $\sigma_{H_2}^*$ , et d'autre part les orbitales de

fragment  $2s$ ,  $2p_x$ ,  $2p_y$  et  $2p_z$ . On appelle  $z$  l'axe bissecteur de l'angle  $\widehat{HOH}$  et  $yz$  le plan de la molécule. L'eau fait partie du groupe ponctuel de symétrie  $C_{2v}$ . On cherche la symétrie des différentes orbitales<sup>15</sup> :

- les orbitales  $2s$  et  $2p_z$  de l'oxygène ainsi que la  $\sigma_{H_2}$  sont de symétrie  $A_1$  ;
- la  $2p_y$  de l'oxygène et la  $\sigma_{H_2}^*$  sont de symétrie  $B_2$  ;
- et enfin la  $2p_x$  de l'oxygène est de symétrie  $B_1$ .

Si on ne veut pas procéder ainsi, on peut aussi travailler avec les opérations de symétrie : à part l'identité, il y en a trois (une rotation  $C_2$  et deux réflexions  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$ ). Les orbitales  $A_1$  sont symétriques par rapport à ces trois opérations ; les  $B_2$  sont antisymétriques par rapport à la rotation et par rapport à  $\sigma_{xz}$  et symétriques par rapport à  $\sigma_{yz}$  ; et enfin la  $B_1$  est antisymétrique par rapport à la rotation et par rapport à  $\sigma_{yz}$  et symétrique par rapport à  $\sigma_{xz}$ .

Au niveau énergétique, on a  $E(2s_O) = -32,4eV$  et  $E(2p_O) = -15,9eV$  ; dans l'eau les deux hydrogènes sont à environ  $1,5\text{\AA}$  i.e. plus du double de la distance de  $H_2$  à l'équilibre : l'interaction entre les deux orbitales  $1s$  est donc faible et les stabilisations et déstabilisations seront faibles. Les orbitales  $\sigma_{H_2}$  et  $\sigma_{H_2}^*$  auront donc une énergie très proche de celle de la  $1s$  isolée ( $-13,6eV$ ). On peut donc écrire :

- L'orbitale  $2p_x$  est seule dans sa géométrie, et sera donc inchangée dans la molécule d'eau ; on l'appellera  $1b_1$  et sera une OM non-liante.

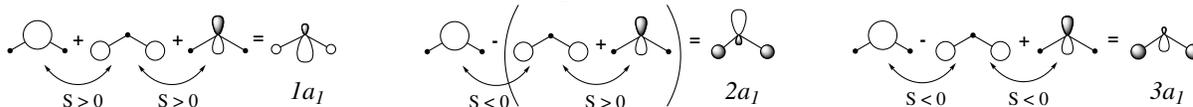
On s'intéresse ensuite à l'interaction entre deux orbitales :

- Les deux orbitales de symétrie  $B_2$  interagissent de manière classique : on aura donc une orbitale liante ( $1b_2$ ) et une orbitale antiliante ( $2b_2$ ). De manière générale, quand on labelle les OM par la RI à laquelle elles appartiennent, on les numérote en commençant par la plus basse en énergie.



Et on conclue par l'interaction à trois orbitales :

- Les trois orbitales  $A_1$  restantes ( $2s$ ,  $2p_z$ ,  $\sigma_{H_2}$ ) vont interagir conformément à ce que nous avons énoncé Partie 7.8. Pour les dessiner, on le fait à la main :
  - la  $1a_1$  aura une forte contribution de la  $2s$  et de la  $\sigma_{H_2}$  et une (toute) petite contribution de la  $2p_z$ , toutes les interactions étant liantes ;
  - la  $3a_1$  aura une forte contribution de la  $2p_z$  et de la  $\sigma_{H_2}$  avec une petite contribution de la  $2s$ , toutes les interactions étant antiliantes ;
  - pour l'intermédiaire  $2a_1$ , on a une interaction antiliante entre  $\sigma_{H_2}$  et  $2s$  et une interaction liante entre  $\sigma_{H_2}$  et  $2p_z$  ; l'orbitale sera plutôt non liante.



Pour finaliser le diagramme, on met les orbitales liantes en bas, les non-liantes au milieu, et les antiliantes en haut. On obtient donc un diagramme d'énergie comme

15. Dans le cas général, il faut écrire la RR de chaque fragment, la réduire en somme de RI, puis chercher les orbitales qui sont bases des RI par exemple avec la méthode des projecteurs.

celui Figure 24 (l'orbitale  $2a_1$  est non-liante et la  $1b_2$  est liante, c'est pour ça que l'énergie de la  $2a_1$  est supérieure à celle de la  $1b_2$ ). Pour trouver la configuration électronique, on remplit ensuite les OM par ordre d'énergie croissante. Chaque hydrogène apporte un unique électron au système et l'oxygène apporte six électrons, on a donc huit électrons qu'on place sur les orbitales  $1a_1$ ,  $1b_2$ ,  $2a_1$  et  $1b_1$  ; la configuration électronique fondamentale de l'eau est donc  $(1a_1)^2 (1b_2)^2 (2a_1)^2 (1b_1)^2$ .

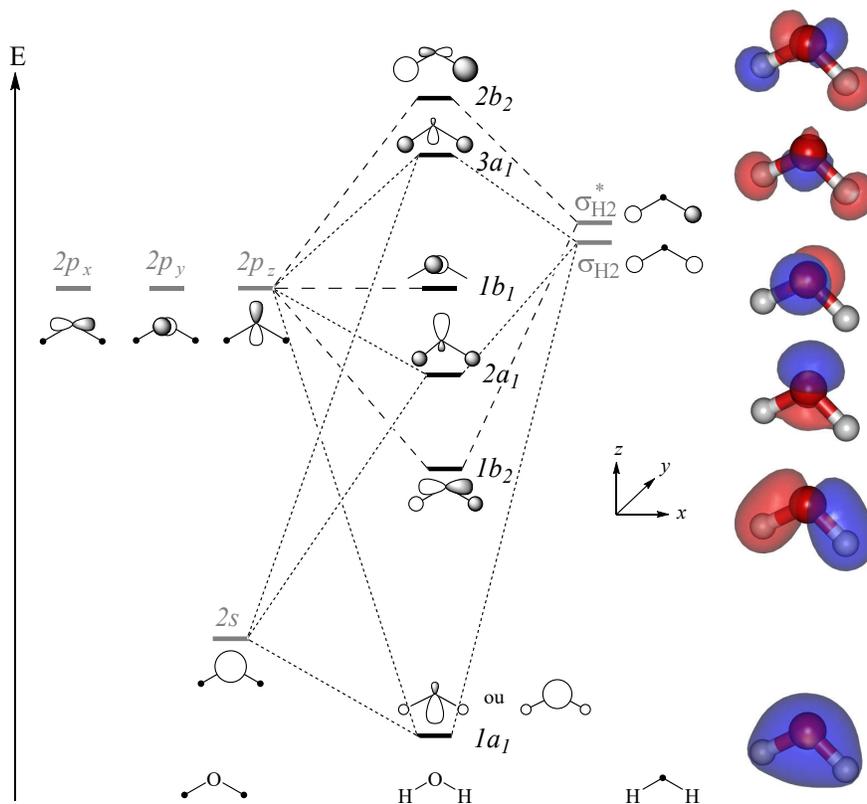


FIGURE 24 – Diagramme d'interaction entre les orbitales de O et celles de  $H_2$  pour  $OH_2$  coudeée, et représentation des OM calculées.

On peut considérer que les deux liaisons O–H sont décrites conjointement par les OM  $1a_1$  et  $1b_2$ . Comme ce que nous avons vu pour  $BeH_2$ , il n'y a pas de correspondance directe entre une liaison et une OM en raison du caractère délocalisé des OM. Comme les OM sont symétriques par rapport au plan  $Oxz$ , les deux liaisons O–H sont équivalentes (les recouvrements sont les mêmes de part et d'autre de l'oxygène). L'OM  $2a_1$  a un fort caractère non liant car elle est orientée vers l'extérieur et ne contribue pas (ou peu) aux liaisons. L'OM  $1b_1$  est elle strictement non liante. On peut donc considérer que les OM  $2a_1$  et  $1b_1$  décrivent les doublets non liants de l'oxygène, mais on constate que ces deux paires libres ne sont pas équivalentes en forme ou en énergie, bien que le schéma de Lewis les dessine de la même façon.

La spectroscopie de photoélectrons est une méthode qui permet de sonder les niveaux d'énergies des OM en mesurant les énergies nécessaires pour arracher des électrons. On présente Figure 25 le spectre de l'eau (*JACS* 2016, p. 6912) : on observe que les niveaux d'énergie associés aux électrons des OM  $2a_1$  et  $1b_1$  sont différents de  $\sim 2$  eV : on retrouve que les deux doublets non liants ne sont pas équivalents.

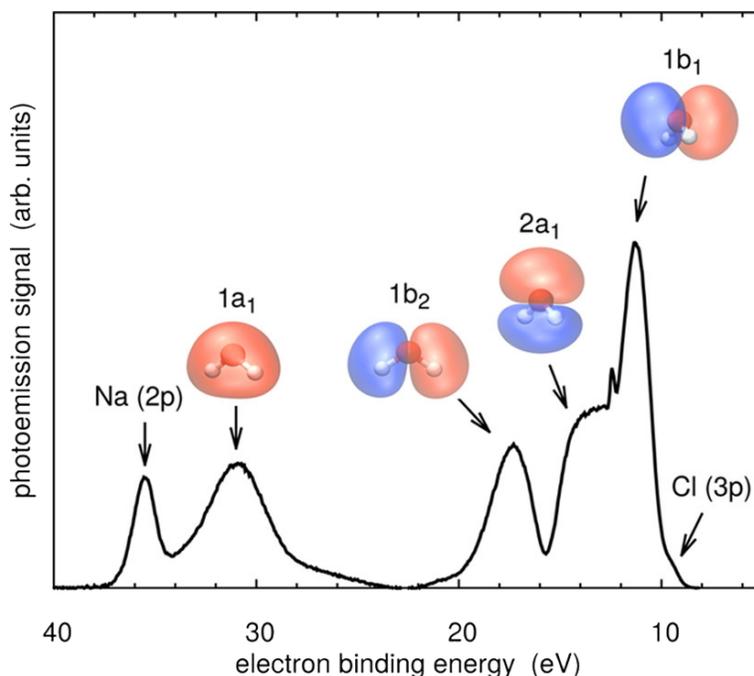


FIGURE 25 – Spectre de photoélectron de l'eau dans une solution de NaCl 1M.

## 7.10 Diagrammes de Walsh et géométries des molécules

On peut déterminer la géométrie d'une molécule en comparant ses diagrammes d'OM tracés dans différentes géométries. Par exemple, on peut tracer le diagramme d'OM d'une molécule  $AH_2$  dans sa géométrie coudée ainsi que dans sa géométrie linéaire et corréler les OM de chaque géométrie, c'est-à-dire les faire correspondre deux à deux en indiquant comment une OM se transformera lors de l'évolution d'un paramètre géométrique. La géométrie d'une molécule sera celle qui minimise l'énergie totale, mais la règle de Walsh nous dit que *“un système aura la même géométrie que son orbitale la plus haute occupée (HO). Lorsqu'on compare deux géométries d'un système, la géométrie d'équilibre est donc celle où la HO est la plus basse en énergie. Si dans deux géométries différentes les HO ont même énergie, alors c'est l'orbitale HO-1 qui donnera la géométrie du système”*. Au cours du passage d'une OM à une autre (en faisant varier un angle par exemple), les propriétés de symétries des OM sont conservées : une OM symétrique par rapport à un élément ne deviendra pas antisymétrique par rapport à cet élément de symétrie.

Nous allons utiliser les diagrammes de  $BeH_2$  et  $OH_2$ . La position des niveaux énergétiques (aussi bien des  $2s$  et  $2p$  que des OM formées) dépendent de l'atome A mais l'allure reste toujours la même. La plus grosse incertitude repose souvent sur la position des OM antiliantes qui peuvent parfois être inversées. On représente ensuite la corrélation entre les OM selon l'évolution de l'angle  $\widehat{H-A-H}$  (noté  $\theta$ ) en partant de  $\theta = 180^\circ$  i.e. la géométrie linéaire (cf Figure 26), et on s'intéresse essentiellement à l'évolution du recouvrement au cours de la déformation.

- En partant de l'orbitale  $1\sigma_x$  en linéaire, si  $\theta$  diminue alors un recouvrement avec la  $2p_z$  apparaît et favorise les interactions liantes ; l'orbitale prend la forme

- de la  $1a_1$  en étant stabilisée. Les deux OM sont donc corrélées, et l'énergie de la  $1a_1$  est plus basse.
- En partant de l'orbitale  $2\sigma_x$  en linéaire, si  $\theta$  diminue alors le recouvrement entre  $\sigma_{H_2}^*$  et la  $2p_x$  diminue ; l'orbitale prend la forme de la  $1b_2$  en étant déstabilisée.
  - L'orbitale  $2p_y$  donne la  $1\pi_y$  dans le cas linéaire et la  $1b_1$  dans le cas coudé. Quelque soit la géométrie, elles restent seules dans leurs symétries avec une énergie inchangée.
  - L'orbitale  $2p_z$  donne lieu à la  $1\pi_z$  dans le cas linéaire. Lorsque l'angle diminue, elle prend la forme de l'orbitale  $2a_1$  car l'interaction avec la  $\sigma_{H_2}$  apparaît. C'est parfois plus facile de le voir dans l'autre sens, en se demandant quel serait la forme de la  $2a_1$  dans une géométrie linéaire. De plus, lorsque  $\theta$  diminue, le recouvrement avec la  $\sigma_{H_2}$  stabilise l'OM. La  $1\pi_z$  et la  $2a_1$  sont donc corrélées, et l'énergie de la  $2a_1$  est plus faible.
  - En partant de la  $1\sigma_x^*$  en linéaire, lorsque l'angle diminue des recouvrements antiliants apparaissent entre la  $\sigma_{H_2}$  et la  $2p_z$  ce qui déstabilise l'OM qui monte en énergie en prenant la forme de la  $2b_2$ .
  - En partant de la  $2\sigma_x^*$  en linéaire, lorsque l'angle diminue les recouvrements antiliants diminuent et l'OM est stabilisée en prenant la forme de la  $3a_1$ .

On voit que pour les deux OM antiliantes, l'une monte en énergie et l'autre baisse, et elles se croisent donc. Selon l'angle, ce sera la  $2b_2$  ou la  $3a_1$  qui sera la plus haute en énergie. Dans le cas de l'eau en géométrie d'équilibre ( $\theta \approx 104^\circ$ ), le croisement n'a pas lieu et la Figure 24 est correcte. Dans un diagramme de corrélation, deux orbitales de **mêmes** symétries ne se croisent pas (règle de non-croisement). Si l'une monte et l'autre descend, elles se mettent à interagir et il y a un croisement évité. Nous ne rentrerons pas dans les détails de ce cas-là.

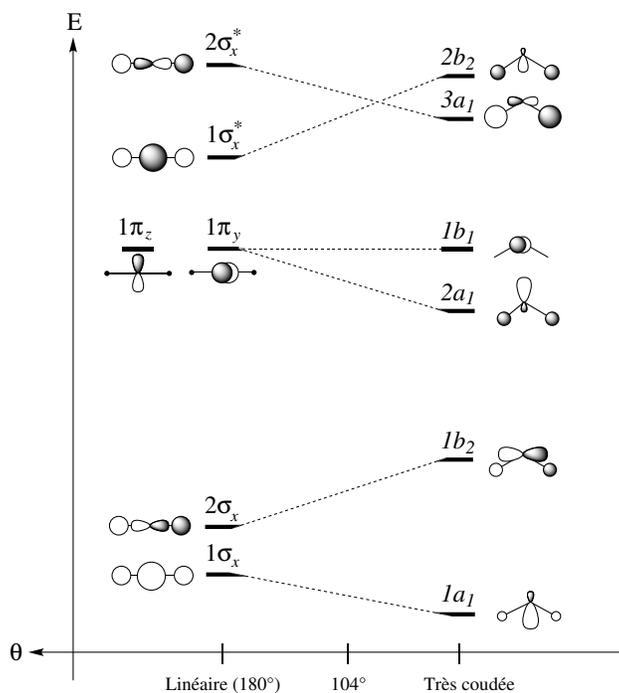
En utilisant la règle de Walsh, on peut prédire que :

- $\text{BeH}_2$  est linéaire car a quatre électrons ;
- $\text{CH}_2$  est coudée car a six électrons ;
- $\text{NH}_2^+$  est coudée car a six électrons
- $\text{OH}_2$  est coudée : l'eau a huit électrons mais l'orbitale haute occupée a une droite de corrélation horizontale insensible à la géométrie. En regardant l'OM en dessous ( $1\pi_z/2a_1$ ), la géométrie la plus stable est coudée.

### 7.11 Molécules diatomiques de la deuxième période

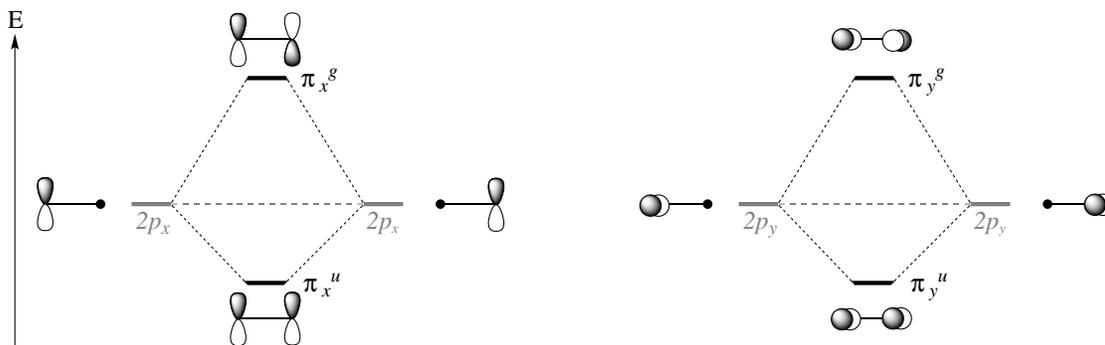
Nous allons maintenant nous intéresser à la construction du diagramme d'OM de molécules comme  $\text{N}_2$  ou  $\text{O}_2$ . C'est cette application qui a permis à la théorie des OM d'acquérir ses premières lettres de noblesse car on a ainsi enfin pu expliquer la structure électronique du dioxygène, qui est très mal décrite par le modèle de Lewis qui avait cours à l'époque ( $\text{O}_2$  est paramagnétique alors que le schéma de Lewis la prédit comme étant diamagnétique). Pour chaque atome, nous prendrons comme orbitales de valence les  $2s$  et les  $2p$ <sup>16</sup>. Nous allons commencer par regarder le cas de  $\text{O}_2$ , et nous appellerons  $z$  l'axe de la liaison et  $xz$  le plan de la feuille.

16. Le recouvrement entre les OA de cœurs et les OA de valence est négligeable devant celui entre OA de cœurs ou entre OA de valence : les OA de cœurs donneront naissance à des OM non-liantes.

FIGURE 26 – Diagramme de Walsh selon l'angle pour les molécules  $AH_2$ .

### 7.11.1 Diagrammes non corrélés

Nous l'avons vu, on ne fait interagir que des orbitales de même symétrie. Les deux orbitales  $2p_x$  ont même symétrie, ainsi que les deux orbitales  $2p_y$ , et à chaque fois ces deux orbitales sont seules dans leurs symétries. On a donc deux interactions à deux orbitales, et on va ainsi former pour chaque lot d'orbitales (soit  $\{2p_x\}$ , soit  $\{2p_y\}$ ) une OM liante et une OM antiliante. Les stabilisations et déstabilisations dues à ces interactions ont même valeurs (les orbitales de départ sont les mêmes à une rotation près), on forme donc un lot de deux OM liantes dégénérées et un lot de deux OM antiliantes dégénérées. De plus, les orbitales atomiques considérées sont antisymétriques par rapport à un plan contenant l'axe de la molécule, elles sont donc de type  $\pi$ . Les OM liantes seront donc notées  $\pi_x^u$  et  $\pi_y^u$  ( $u$  car elles sont antisymétriques par rapport au centre d'inversion) et les OM antiliantes seront quant à elles notées  $\pi_x^g$  et  $\pi_y^g$  ( $g$  car elles sont symétriques par rapport au centre d'inversion) (cf Fig. 27).

FIGURE 27 – OM de symétrie  $\pi$  des molécules de dioxygène ou de difluor.

Nous allons maintenant regarder les OM  $\sigma$ . Les orbitales  $2s$  et  $2p_z$  sont de mêmes symétries, elles peuvent donc potentiellement interagir ensemble dans une interaction à quatre orbitales. Mais pour les atomes d'oxygène ou de fluor, l'orbitale  $2s$  est très basse en énergie par rapport aux orbitales  $2p$  (*vide infra*) et nous avons vu que plus deux OA sont éloignées en énergie, plus leurs interactions (et donc leurs stabilisation/déstabilisation) diminuent. On pourra donc ici négliger l'interaction  $2s/2p_z$  et on aura deux schémas d'interaction à deux orbitales (au lieu d'un à quatre orbitales). On va donc ici aussi faire à chaque fois une OM liante et une OM antiliante ; les OM liantes seront notées  $\sigma^g$  et les antiliantes  $\sigma^u$ <sup>17</sup> (cf Figure 28).

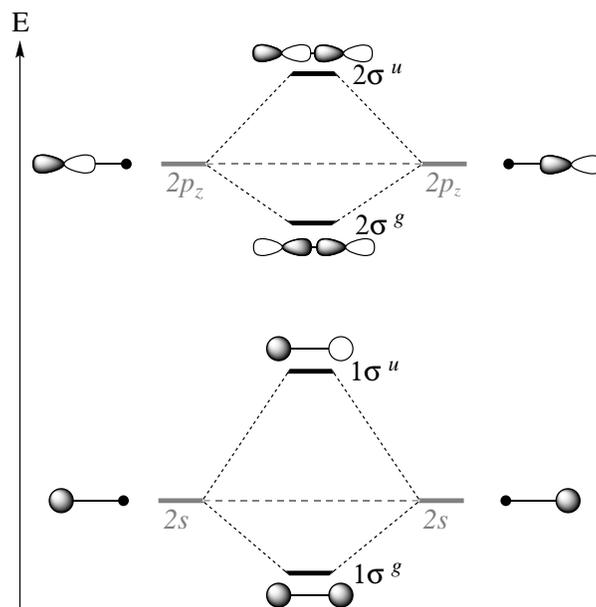


FIGURE 28 – OM de symétrie  $\sigma$  des molécules de dioxygène ou de difluor.

On peut maintenant tracer le diagramme complet de la molécule de dioxygène. L'orbitale  $2\sigma^g$  sera plus basse en énergie que les  $\pi^u$  car un recouvrement axial est plus important qu'un recouvrement latéral et donc la stabilisation est plus importante. Pour les mêmes raisons, l'orbitale  $2\sigma^u$  sera plus haute en énergie que les  $\pi^g$ . On obtient donc le diagramme représenté Figure 29. On appelle ce diagramme un diagramme non corrélé car on ne fait pas intervenir de corrélation entre les orbitales  $2s$  et les orbitales  $2p_z$ . Chaque oxygène apporte six électrons de valence. On peut donc mettre deux électrons sur les cinq orbitales les plus basses en énergie (de  $1\sigma^g$  à  $\pi_{x/y}^u$ ), un sur la  $\pi_x^g$  et un sur la  $\pi_y^g$ . La configuration électronique fondamentale de  $O_2$  est donc  $(1\sigma^g)^2(1\sigma^u)^2(2\sigma^g)^2(\pi_u^x)^2(\pi_u^y)^2(\pi_g^x)^1(\pi_g^y)^1$ . **Deux électrons restent non appariés, ce qui explique les propriétés paramagnétiques de la molécule.**

17. Il y a une petite différence à noter entre les OM liantes : si les orbitales atomiques de chaque site sont pris de même phases, l'orbitale  $1\sigma_g$  est proportionnelle à  $2s_1 + 2s_2$  alors que l'orbitale  $2\sigma_g$  est proportionnelle à  $2p_{z1} - 2p_{z2}$  pour que les lobes de même signe soient en face. Il en est de même avec les OM antiliantes en changeant les signes respectifs.

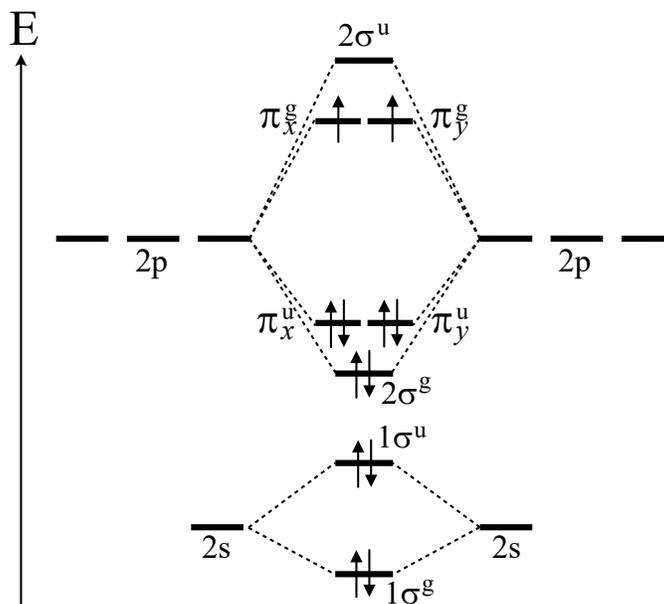


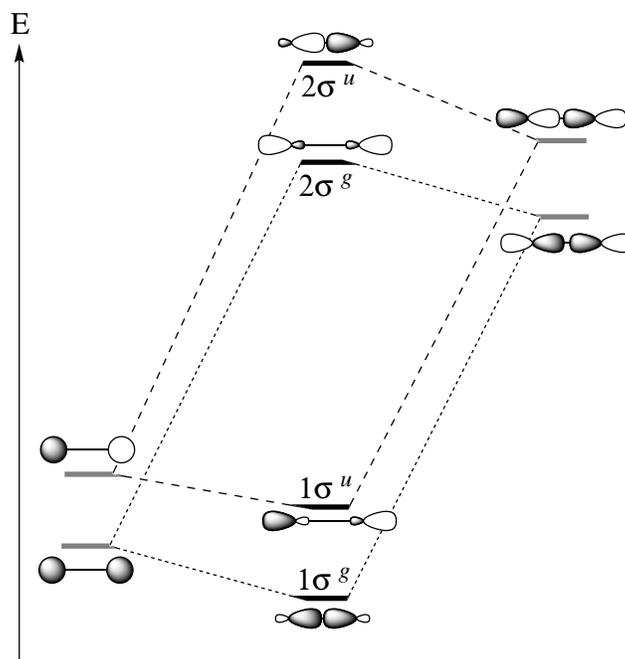
FIGURE 29 – Diagramme d'OM des molécules de dioxygène ou de difluor.

### 7.11.2 Diagrammes corrélés

Pour tracer le diagramme d'OM du dioxygène, nous avons négligé les interactions  $2s/2p_z$ . Cela se justifie pour  $O_2$  et  $F_2$ , mais pas pour les autres molécules diatomiques de la deuxième période. En effet, les écarts respectifs pour B, C, N, O, F et Ne sont 9,0, 8,7, 12,7, 16,5, 21,5 et 26,8 eV : pour B, C ou N, les OA sont proches en énergie et interagissent. Nous allons donc devoir faire une interaction à quatre orbitales, et pour détailler cela on regarde donc maintenant le cas de  $N_2$ . Pour les orbitales  $\pi$ , rien n'est changé par rapport à  $O_2$ . Pour les orbitales  $\sigma$  par contre, on ne peut plus négliger les interactions entre orbitales  $2s$  et  $2p_z$  car elles sont trop proches en énergies. Pour résoudre le problème d'interaction à quatre orbitales, on utilise la méthode des fragments : on fait d'abord interagir les  $2s$  et les  $2p_z$  ensemble (comme ce qu'on a fait pour  $O_2$ , cf Figure 28). Puis on fait interagir les orbitales de fragment de mêmes symétries i.e. les  $\sigma^g$  ensembles et les  $\sigma^u$  ensembles. On a donc à nouveau des interactions à deux orbitales qu'on sait traiter. On va donc obtenir les OM représentées Figure 30.

Les caractères liants ou antiliants des OM vont être nettement modifiés entre les orbitales de fragment et les orbitales moléculaires. Ceci a pour conséquence directe de modifier les énergies des orbitales : les orbitales  $1\sigma$  sont globalement abaissées en énergie alors que les  $2\sigma$  montent en énergie. L'OM  $2\sigma^g$  va ainsi avoir une énergie supérieure à celle des orbitales  $\pi^u$  (la  $2\sigma^u$  restera par contre plus antiliante que les  $\pi^g$  car le recouvrement axial sera plus antiliant que le latéral). On a alors le diagramme d'orbitales moléculaires représenté Figure 31 qu'on appelle diagramme corrélé.

La grosse différence entre les diagrammes d'OM de  $N_2$  et de  $O_2$  est la position du niveau énergétique de l'orbitale  $2\sigma^g$ . C'est en fait la différence énergétique entre les OA  $2s$  et  $2p$  et le recouvrement entre ces orbitales qui permet de quantifier l'importance

FIGURE 30 – OM de symétrie  $\sigma$  de la molécule de diazote.

de la corrélation (le recouvrement étant lui-même lié à la distance entre les atomes et à la contraction des orbitales i.e. à l'électronégativité des atomes). L'écart énergétique et l'électronégativité des atomes prédisent une forte corrélation pour les éléments à gauche de la classification périodique (lithium, béryllium, etc ...). **La transition se fait entre l'azote et l'oxygène. On aura donc un diagramme corrélé pour les molécules de  $\text{Li}_2$  à  $\text{N}_2$  et un diagramme non corrélé pour  $\text{O}_2$  à  $\text{Ne}_2$ .** Pour les molécules diatomiques de la troisième période, les orbitales  $3s$  et  $3p$  sont proches en énergie et on a des diagrammes corrélés ; il en sera de même pour tous les dihalogènes autres que  $\text{F}_2$ .

### 7.11.3 Structure électronique des molécules $\text{A}_2$

Par analogie avec le modèle de Lewis, on peut définir le nombre de liaisons entre deux atomes par  $n = \frac{n_l - n_a}{2}$  où  $n_l$  est le nombre d'électrons sur des orbitales liantes et  $n_a$  le nombre d'électrons sur des orbitales antiliantes. Étudions le cas des huit molécules  $\text{A}_2$  de la deuxième période :

- $\text{Li}_2$  de configuration électronique fondamentale  $(1\sigma^g)^2$  (abrégée en c.e.f. pour la suite de cette partie) : on trouve  $n = 1$  et la liaison est de type  $\sigma$ .
- $\text{Be}_2$  de c.e.f.  $(1\sigma^g)^2(1\sigma^u)^2$  : on trouve  $n = 0$  ce qui est conforme à l'expérience puisque  $\text{Be}_2$  n'existe pas.
- $\text{B}_2$  de c.e.f.  $(1\sigma^g)^2(1\sigma^u)^2(\pi_x^u)^1(\pi_y^u)^1$  : on trouve  $n = 1$  et la liaison est de type  $\pi$  (la contribution des électrons  $\sigma$  est nulle et ceux-ci formeront des doublets non liants), une structure de Lewis associée serait donc  $|\text{B} - \text{B}|$ . On a en fait deux demi-liaisons  $\pi$  dans des plans orthogonaux : un électron dans  $\pi_x^u$  et un électron dans  $\pi_y^u$ . De plus, on trouve que la molécule  $\text{B}_2$  est paramagnétique ce qui est une preuve de validité du modèle : si on n'avait pas pris en compte la corrélation, l'orbitale  $2\sigma^g$  serait sous les  $\pi^u$  et  $\text{B}_2$  serait donc diamagnétique.

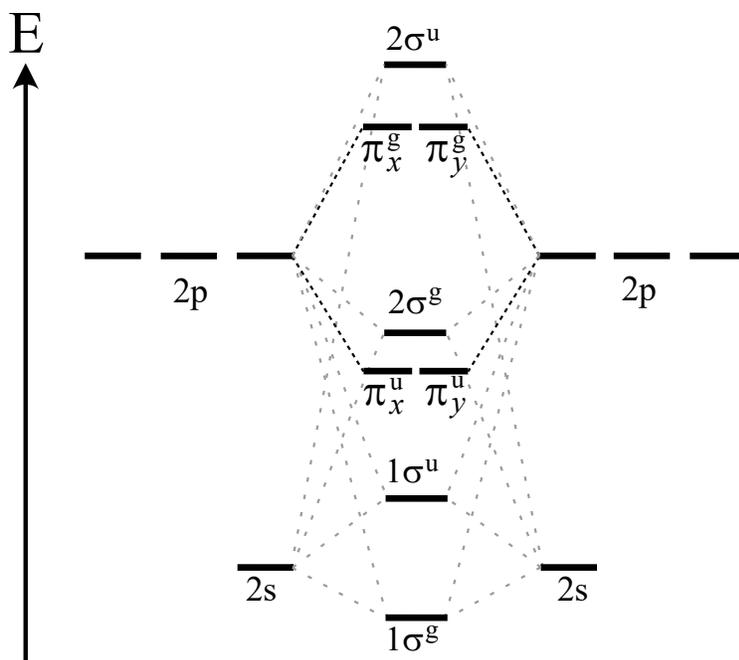


FIGURE 31 – Diagramme d'OM de la molécule de diazote.

- C<sub>2</sub> de c.e.f.  $(1\sigma^g)^2(1\sigma^u)^2(\pi_x^u)^2(\pi_y^u)^2$  : on trouve  $n = 2$  et les deux liaisons sont de type  $\pi$ , une structure de Lewis associée serait donc  $|\text{C} = \text{C}|$ . Il faut noter qu'une quadruple liaison n'est pas envisageable puisque les électrons  $1\sigma^u$  annulent le caractère liant des électrons  $1\sigma^g$  (les électrons  $\sigma$  forment les doublets non liants). La molécule C<sub>2</sub> peut donc exister, mais polymérise pour donner lieu à des formes plus stables du carbone.
- N<sub>2</sub> de c.e.f.  $(1\sigma^g)^2(1\sigma^u)^2(\pi_x^u)^2(\pi_y^u)^2(2\sigma^g)^2$  : on trouve  $n = 3$ , i.e. une triple liaison entre les deux atomes, avec une liaison  $\sigma$  et deux liaisons  $\pi$ <sup>18</sup>.
- O<sub>2</sub> de c.e.f.  $(1\sigma^g)^2(1\sigma^u)^2(2\sigma^g)^2(\pi_x^u)^2(\pi_y^u)^2(\pi_x^g)^1(\pi_y^g)^1$  : on trouve  $n = 2$ . Sur les six électrons  $\sigma$ , quatre sont liants et deux antiliants, donc il y a une liaison  $\sigma$  et deux doublets non liants. Il en est de même pour les six électrons  $\pi$  : on a donc une liaison  $\pi$  et deux doublets non liants de plus. D'où la structure de Lewis classique de O<sub>2</sub>. Notons cependant que la liaison  $\pi$  est en fait deux demi-liaisons comme pour B<sub>2</sub> (1 électron dans le  $\pi^u$  et 1 dans le  $\pi^g$  à chaque fois), d'où une molécule paramagnétique.
- F<sub>2</sub> de c.e.f.  $(1\sigma^g)^2(1\sigma^u)^2(2\sigma^g)^2(\pi_x^u)^2(\pi_y^u)^2(\pi_x^g)^2(\pi_y^g)^2$  : on trouve  $n = 1$  et l'ensemble des électrons  $\pi$  sont globalement non liants. La liaison  $\sigma$  de F<sub>2</sub> est globalement décrite par l'orbitale  $2\sigma^g$  et il y a en tout six doublets non liants.
- Ne<sub>2</sub> de c.e.f.  $(1\sigma^g)^2(1\sigma^u)^2(2\sigma^g)^2(\pi_x^u)^2(\pi_y^u)^2(\pi_x^g)^2(\pi_y^g)^2(2\sigma^u)^2$  : on trouve  $n = 0$  et comme la déstabilisation est supérieure à la stabilisation, cela explique pourquoi les atomes de gaz rares ne forment pas de liaisons entre eux.

18. En y prêtant plus attention, la liaison  $\sigma$  est plutôt décrite par l'orbitale  $1\sigma_g$  et les doublets non liants par les orbitales  $1\sigma_u$  et  $2\sigma_g$ .

#### 7.11.4 Molécules de type AB

Les OM  $\pi$  se construisent de manière similaire à celles des molécules  $A_2$  : on forme donc deux orbitales liantes dégénérées surtout développées sur l'atome le plus électronégatif et deux orbitales antiliantes dégénérées surtout développées sur l'atome le moins électronégatif (les indices  $u$  et  $g$  n'auront plus lieu d'être puisqu'il n'y a plus de centre d'inversion). Pour les OM  $\sigma$  c'est plus compliqué car selon la différence d'électronégativité entre A et B, les interactions prépondérantes peuvent être entre OA  $2s_A/2s_B$  ou entre OA  $2s_A/2p_B$ . De plus comme il n'y a plus de centre d'inversion, on ne peut plus utiliser la méthode des fragments comme ce qu'on a fait pour les molécules  $A_2$ . Il n'y a donc pas de cas général et tout se fait au cas par cas.

## 8 Méthodes de Hückel

### 8.1 Historique

La méthode de Hückel est un calcul d'orbitales moléculaires dans le cadre de l'approximation LCAO. Elle a joué un rôle historique important, et a été très utilisée pour calculer les orbitales moléculaires des molécules aromatiques ou, plus généralement, conjuguées. La méthode a été publiée initialement par Hückel en 1930 pour l'étude de l'éthylène, et en 1931 pour le calcul des OM du benzène. Lennard-Jones l'a généralisée aux polyènes (1937). Coulson et Longuet-Higgins l'ont utilisée et diversifiée jusqu'en 1949. Mais durant et après la seconde guerre mondiale, l'apparition des calculs par ordinateurs a permis de faire des calculs plus quantitatifs (méthode de Hückel étendue, méthodes auto-cohérentes ...). Cependant la méthode est encore utilisée, surtout pour sa simplicité. Elle est donc vraiment importante à connaître et comprendre. En plus des leçons qui portent dessus, c'est quelque chose qui est déjà tombée aux écrits.

### 8.2 Méthode de Hückel simple

On part de l'équation de Schrödinger stationnaire. On lui applique les approximations de Born-Oppenheimer et de champ moyen, ce qui nous permet d'écrire :

$$\hat{\mathcal{H}}_{el} = \sum_i \hat{h}(i) \quad \text{avec} \quad \hat{h}(i)\phi_i = \varepsilon_i\phi_i \quad \psi = \prod_i \phi_i \quad \text{et} \quad E_{el} = \sum_i \varepsilon_i$$

Pour les OM  $\phi_i$ , on utilise l'approximation LCAO et on a donc :  $\phi_i = \sum_j c_{ij}\chi_j$  (où les  $\chi_j$  sont les OA). En injectant ça dans l'équation de Schrödinger mono-électronique, on projette sur les  $\chi_k$ , et on tombe sur les équations séculaires :

$$\sum_j c_{ij}h_{kj} = \varepsilon_i \sum_j c_{ij}S_{kj}$$

La méthode de Hückel consiste à paramétriser les intégrales  $h_{kj}$  et  $S_{kj}$ . Elle est valable à condition qu'il n'y ait qu'une orbitale atomique par atome considéré. C'est le cas des polyènes, où la base considérée est alors la base des OA  $2p_z$ . On pose :

$h_{ii} = \alpha_i$  appelée intégrale coulombienne

$h_{ij} = 0$  si  $i$  et  $j$  ne sont pas adjacents

$h_{ij} = \beta_{ij}$  sinon (appelée intégrale de résonance)

$S_{ij} = \delta_{ij}$  (approximation la plus forte car pour qu'il y ait conjugaison il faut  $S_{ij} \neq 0$ )

Cette méthode peut tout à fait s'appliquer à des problèmes autres que les polyènes, l'étude de fragments de  $n$  atomes d'hydrogènes par exemple, ou une chaîne  $H_\infty$ .

### 8.3 Paramètres

L'intégrale coulombienne représente l'énergie de l'OA  $\chi_i$  avant interaction<sup>19</sup>, c'est donc un paramètre caractéristique de l'atome portant l'orbitale atomique. L'intégrale

19. On a  $\alpha_i = h_{ii} = \langle \chi_i | \hat{h} | \chi_i \rangle$ . On peut faire apparaître un hamiltonien atomique de l'atome isolé dans  $\hat{h}$ . On a alors  $\alpha_i = \langle \chi_i | \hat{h}_{\text{atome A}} | \chi_i \rangle + \langle \chi_i | \hat{h}_{\text{atomes autre que A}} | \chi_i \rangle$ . Ce second terme est nettement plus faible que le premier car l'électron occupe l'OA  $\chi_i$  centré sur **A**. On peut donc écrire  $h_{ii} \approx E_{\chi_i}$ , énergie de l'orbitale dans l'atome isolé.

de résonance est caractéristique de la liaison entre les atomes  $i$  et  $j$  (ainsi évidemment que des orbitales choisies).  $\alpha_i$  et  $\beta_{ij}$  sont négatifs. Pauling et Wheland ont montré (1950) que l'on pouvait simplifier les calculs dans le cas de molécules hétéroatomiques en exprimant les intégrales coulombiennes et de résonance en fonction des paramètres du carbone et des électronégativités des atomes : on pose donc  $\alpha_X = \alpha + h_X\beta$  et  $\beta_X = k_X\beta$ . On note en général  $\alpha_C = \alpha$  et  $\beta_{CC} = \beta$ . On donne certains de ces paramètres Tableau 5.

| Paramètres de la méthode       | Intégrale coulombienne            | Intégrale de résonance   |
|--------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|
| Carbone                        | $\alpha_C = \alpha$               | $\beta_{CC} = \beta$     |
| Oxygène à 1 électron           | $\alpha_O = \alpha + \beta$       | $\beta_{CO} = \beta$     |
| Oxygène à 2 électrons          | $\alpha_O = \alpha + 2\beta$      | $\beta_{CO} = 0,8\beta$  |
| Azote à 1 électron             | $\alpha_N = \alpha + 0,5\beta$    | $\beta_{CN} = \beta$     |
| Azote à 2 électrons            | $\alpha_N = \alpha + 1,5\beta$    | $\beta_{CN} = 0,8\beta$  |
| Fluor                          | $\alpha_F = \alpha + 3\beta$      | $\beta_{CF} = 0,7\beta$  |
| Chlore                         | $\alpha_{Cl} = \alpha + 2\beta$   | $\beta_{CCl} = 0,4\beta$ |
| Brome                          | $\alpha_{Br} = \alpha + 1,5\beta$ | $\beta_{CBr} = 0,3\beta$ |
| Methyl (modèle hétéroatomique) | $\alpha_{Me} = \alpha + 2\beta$   | $\beta_{CMe} = 0,7\beta$ |

TABLE 5 – Paramètres des hétéro-éléments dans la méthode de Hückel.

On appelle oxygène à 1 électron, un atome d'oxygène mettant en jeu une seule orbitale  $2p_z$  (comme le carbone) : ce sera de le cas d'un oxygène dans un carbonyle. Les oxygènes à deux électrons mettent en jeu un doublet d'électrons comme dans un énol. Il est normal d'avoir  $\alpha_O < \alpha_C$  car l'oxygène est plus électronégatif que le carbone, l'énergie de son orbitale est donc inférieure. Le paramètre  $\beta_{ij}$  devrait tenir compte de la longueur de la liaison  $i-j$ , et donc on pourrait rencontrer la méthode de Hückel avec un paramètre  $\beta$  qui dépend de  $R_{ij}$ . Enfin, lorsqu'on a des ramifications (un groupement méthyle par exemple), il est courant de remplacer le groupement par un hétéroatome X fictif qui apporte deux électrons au système  $\pi$  et auquel on donne certains paramètres : deux des OM du fragment  $\text{CH}_3$  (une liante et une antiliante) ont la symétrie  $\pi$  et peuvent donc interagir avec les OA  $2p_z$ . La liante est doublement occupée, et l'antiliante est suffisamment haute en énergie pour qu'on la néglige.

## 8.4 Utilisation

Prenons l'exemple de l'éthylène ( $\text{H}_2\text{C}=\text{CH}_2$ ). La première étape dans un problème de Hückel est toujours de numéroter les atomes. On se sert ensuite des équations séculaires établies Partie 5.4, mais qu'on simplifie avec les hypothèses de cette méthode. On a ici un problème de dimension 2. On a donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

Les termes hors diagonaux se limitent à  $\beta$  car pour  $i \neq j$ ,  $S_{ij} = 0$ . Comme nous l'avons vu, il faut annuler le déterminant de ce système qui a sinon pour solution  $c_1 = c_2 = 0$ . Une simplification courante est de poser  $x = \frac{\alpha - E}{\beta}$ . D'où :

$$\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{vmatrix} = \beta^2 \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

On doit résoudre  $x^2 - 1 = 0$ , et on a donc :  $x = \pm 1$ . D'où  $E = \alpha \mp \beta$ . On a donc trouvé les énergies de manière très simple et très rapide (c'était le but...). Pour trouver la forme des orbitales, on reprend le système de départ ; le déterminant étant nul, le système d'équations est lié. Dans notre cas, comme il y en a deux, cela veut dire qu'elles sont proportionnelles. On prend donc une des deux équations, et la condition de normalisation. Regardons le cas avec  $x = -1$  i.e.  $E = \alpha + \beta$  :

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 = 0 \\ c_1^2 + c_2^2 = 1 \end{cases}$$

On trouve donc  $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On a donc  $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2p_{z_1} + 2p_{z_2})$ . Pour  $x = +1$  i.e.  $E = \alpha - \beta$  on trouve  $\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2p_{z_1} - 2p_{z_2})$ . Ce sont les mêmes formules que celles que nous avons trouvées Partie 7.1.2 avec  $S=0$ .

Regardons le cas du méthanal ( $\text{H}_2\text{C}=\text{O}$ ) : l'oxygène apporte ici 1 électron au système. On a donc  $\alpha_O = \alpha + \beta$  et  $\beta_{CO} = \beta$ . D'où le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x + 1 \end{vmatrix} = 0$$

On trouve  $E_1 = \alpha + 1.62\beta$  et  $E_2 = \alpha - 0.62\beta$ . Et ensuite  $\phi_1 = 0,532p_{z_C} + 0,852p_{z_O}$  et  $\phi_2 = 0,852p_{z_C} - 0,532p_{z_O}$  : on retrouve le fait que l'OM liante  $\phi_1$  a le plus gros coefficient sur l'atome le plus électronégatif.

Prenons un dernier exemple, celui du 2-méthylbutadiène. On numérote de 1 à 4 les atomes du butadiène et 5 le méthyle. Le déterminant séculaire va s'écrire :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0,7 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 & x + 2 \end{vmatrix} = 0$$

L'utilisation de la méthode de Hückel consiste donc principalement à écrire le déterminant séculaire de la matrice  $H - E.Id$ , puis le résoudre. Sur le déterminant (qui est symétrique), on a toujours des  $x$  sur la diagonale, et des 1 en  $\{i, j\}$  si les atomes  $i$  et  $j$  sont liés (0 sinon) (ou les valeurs correspondantes si on a des hétéro-éléments). Cependant, ne serait-ce que pour le benzène, résoudre un déterminant 6x6 n'est pas toujours facile à la main. On peut donc utiliser la symétrie pour simplifier le problème. Dans un problème d'agrégation, il est envisageable qu'on vous donne les résultats et qu'on vous demande de travailler dessus.

*Commentaire* : lorsqu'il ne manque qu'une valeur des énergies, une méthode pratique est d'utiliser la conservation de la trace. Dans la base des orbitales  $2p_z$ , la trace de la matrice du hamiltonien vaut  $\sum_i \alpha_i$ . Quand on cherche les orbitales moléculaires, on fait un changement de base ; dans cette nouvelle base des OM, la matrice est alors diagonale et sur la diagonale on a les énergies des OM  $\varepsilon_i$ . Or la trace est indépendante de la base dans laquelle on regarde la matrice. On a donc :  $\sum_i \alpha_i = \sum_i \varepsilon_i$ .

## 8.5 Résultats supplémentaires

En plus de l'énergie et de la forme des OM, on peut pousser un peu plus loin l'utilisation de cette méthode. On définit l'énergie totale  $\pi$  par  $E^\pi = \sum_i n_i \varepsilon_i$  où la somme se fait sur les orbitales  $i$ , d'énergie  $\varepsilon_i$  et d'occupation  $n_i$ . L'énergie de liaison  $\pi$  se définit comme la différence entre l'énergie totale  $\pi$  et l'énergie des électrons pris dans les atomes isolés :  $E^\pi - \sum_i \alpha_i$ . L'énergie de délocalisation (ou énergie de résonance) compare l'énergie du système avec l'énergie du même système où les liaisons sont localisées, i.e. avec plusieurs fragments éthylène ayant chacun pour énergie  $\alpha + \beta$  (ou avec les fragments associés si on a des hétéro-éléments) :  $n \times (\alpha + \beta) - E^\pi$ .

On définit aussi la charge globale de l'atome  $\mathbf{A}$  par  $Q_A = \sum_i n_i c_{iA}^2$  où la somme se fait sur les orbitales et où  $n_i$  est le nombre d'occupation de l'orbitale  $i$ ;  $c_{iA}$  représente le coefficient de l'atome  $\mathbf{A}$  dans l'orbitale  $i$ . La charge nette est ensuite définie par :  $q_A = N_A - Q_A$  où  $N_A$  est le nombre d'électrons apportés par l'atome  $\mathbf{A}$  (1 pour un carbone par exemple). On peut aussi définir l'indice de liaison entre les atomes  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$  par  $p_{RS} = \sum_i n_i c_{iR} c_{iS}$  où là aussi la somme est faite sur les orbitales et  $n_i$  représente l'occupation de l'orbitale  $i$  alors que  $c_{iR}$  et  $c_{iS}$  sont les coefficients des atomes  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{S}$  dans l'orbitale. Il y a encore d'autres types de grandeurs qu'on peut définir, comme l'indice de valence libre, que nous ne détaillerons pas ici (cf Exercice 14.4.2).

Prenons l'exemple du cation allyle  $\text{C}_3\text{H}_5^+$ . Le déterminant séculaire s'écrit :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Ses racines sont  $x = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ . On peut ici remarquer que le déterminant séculaire (et donc les énergies et formes des OM) ne dépend pas de l'état d'oxydation du système : on aurait le même déterminant avec le radical  $\text{C}_3\text{H}_5^\bullet$  ou avec  $\text{C}_3\text{H}_5^-$  ; seules les occupations des orbitales changent alors. C'est un des défauts de la méthode de Hückel. Les énergies et formes des OM sont :

$$E_1 = \alpha + \sqrt{2}\beta : \varphi_1 = 0,5 \cdot 2p_1 + 0,707 \cdot 2p_2 + 0,5 \cdot 2p_3$$

$$E_2 = \alpha : \varphi_2 = 0,707 \cdot 2p_1 - 0,707 \cdot 2p_3$$

$$E_3 = \alpha - \sqrt{2}\beta : \varphi_3 = 0,5 \cdot 2p_1 - 0,707 \cdot 2p_2 + 0,5 \cdot 2p_3$$

On a donc une orbitale liante, une non-liante (le coefficient de  $2p_2$  y vaut 0) et une orbitale antiliante. Le cation allyle a deux électrons, et on trouve  $Q_1 = Q_3 = 2 \cdot (0,5)^2 = 0,5$  et  $Q_2 = 2 \cdot (0,707)^2 = 1$  d'où  $q_1 = q_3 = 1 - 0,5 = 0,5$  et  $q_2 = 1 - 1 = 0$ . Les indices de liaison valent  $p_{12} = p_{23} = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,707 = 0,707$ . Dans le cation allyl  $\text{C}_3\text{H}_5^+$ , les deux liaisons sont donc les mêmes. De plus l'atome central diffère des deux autres atomes par sa charge : cela nous permettra d'étudier la réactivité par exemple.

## 8.6 Polyènes

Pour un polyène linéaire de formule  $C_nH_{n+2}$ , Coulson a montré que l'énergie de l'orbitale  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) et le coefficient de l'atome  $i$  dans cette orbitale valent :

$$\varepsilon_j = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$$

$$c_j^i = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right)$$

Et pour un polyène cyclique  $C_nH_n$ , on a ( $-\frac{n-1}{2} \leq j \leq \frac{n-1}{2}$  pour  $j$  impair et  $-\frac{n}{2} \leq j \leq \frac{n}{2}$  pour  $j$  pair) :

$$\varepsilon_j = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right)$$

$$c_j^i = \sqrt{\frac{2}{n}} \sin\left(\frac{2ij\pi}{n}\right) \text{ pour } i > 0$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n}} \cos\left(\frac{2ij\pi}{n}\right) \text{ pour } i \leq 0$$

Ceci peut se retrouver en utilisant le *cercle de Frost*, valable pour les cycles plans  $C_nH_n$  : on place le polygone régulier dans un cercle centré en  $\alpha$  et de rayon  $2\beta$ , une pointe en bas : la projection orthogonale des sommets du polygone sur l'axe des énergies nous donne les valeurs des énergies des orbitales (cf Figure 32).

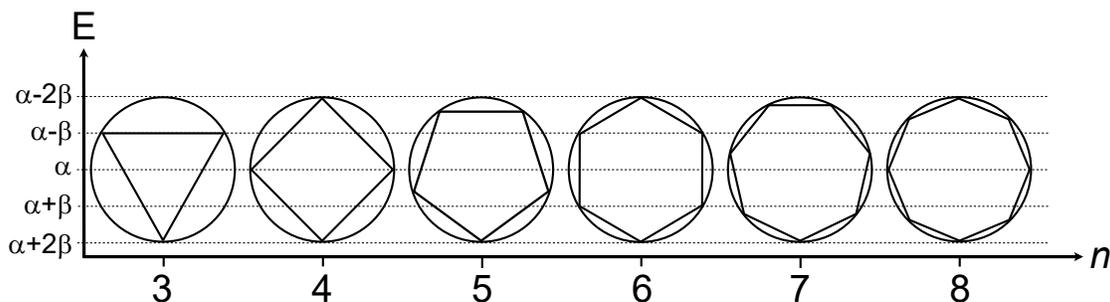


FIGURE 32 – Cercle de Frost.

## 8.7 Utilisation de la symétrie

Voyons un exemple où la symétrie peut beaucoup simplifier un problème de Hückel. Le déterminant séculaire de la molécule de cis-butadiène s'écrit :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Pour le développer il faut réussir à le manipuler suffisamment ce qui est souvent pénible. On trouve ensuite qu'il se développe en  $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$  (qui peut éventuellement se résoudre à la main parce que c'est un cas assez simple, en posant  $X = x^2$ ).

On est dans le groupe ponctuel de symétrie  $C_{2v}$  et on a  $\Gamma_4 = \{4 \ 0 \ 0 \ -4\}$ , qui se réduit en  $2A_2 \oplus 2B_1$  (l'axe  $z$  est pris selon l'axe  $C_2$  et le plan de la molécule est  $yz$ ; les orbitales du système  $\pi$  sont donc les orbitales  $2p_x$ ). En notant  $p_i$  l'orbitale atomique  $2p_x$  de l'atome  $i$  (attention aux notations), on peut construire des fonctions symétriques et antisymétriques par rapport au plan médiant (orthogonales au plan moléculaire); ces fonctions seront les orbitales de symétrie, respectivement bases de  $A_2$  et bases de  $B_1$  :

$$\begin{aligned}\phi_{b_1,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_4) & ; & & \phi_{b_1,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 + p_3) \\ \phi_{a_2,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_4) & ; & & \phi_{a_2,2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 - p_3)\end{aligned}$$

On va chercher à re-écrire le déterminant séculaire dans la base de ces fonctions.

$$\begin{aligned}(H - E.Id)(p_1 + p_4) &= (H - E.Id)p_1 + (H - E.Id)p_4 \\ &= ((\alpha - E)p_1 + \beta p_2) + (\beta p_3 + (\alpha - E)p_4) \\ &= (\alpha - E)(p_1 + p_4) + \beta(p_2 + p_3) \\ (H - E.Id)(p_2 + p_3) &= \beta(p_1 + p_4) + (\alpha + \beta - E)(p_2 - p_3) \\ (H - E.Id)(p_1 - p_4) &= (\alpha - E)(p_1 - p_4) + \beta(p_2 - p_3) \\ (H - E.Id)(p_2 - p_3) &= \beta(p_1 - p_4) + (\alpha - \beta - E)(p_2 - p_3)\end{aligned}$$

Dans la base  $\{\phi_{b_1,1}; \phi_{b_1,2}; \phi_{a_2,1}; \phi_{a_2,2}\}$  on a donc l'écriture suivante de la matrice  $H - E.Id$  (on pose  $x = \frac{\alpha - E}{\beta}$ ) :

$$H - E.Id = \beta^4 \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-1 \end{pmatrix}$$

On a donc une écriture diagonale par bloc. Annuler le déterminant associé revient à annuler :  $[x(x+1) - 1][x(x-1) - 1] = [x^2 + x - 1][x^2 - x - 1] = x^4 - 3x^2 + 1$  : on a donc bien retrouvé le même déterminant. Sauf que là on l'a factorisé, et on peut résoudre  $x(x+1) - 1 = 0$  et  $x(x-1) - 1 = 0$  à la main. On trouve  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  pour le premier bloc et  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  pour le deuxième. Chaque bloc obtenu correspond à une symétrie : le premier les orbitales symétriques, le second les orbitales antisymétriques. Les 0 de la matrice ne sont donc pas des 0 de la méthode de Hückel qui résultent d'une approximation, mais des 0 exacts dus à la symétrie.

On peut aussi simplifier la recherche des OM : nous sommes censés écrire  $\psi$  sous la forme  $c_1\phi_{b_1,1} + c_2\phi_{b_1,2} + c_3\phi_{a_2,1} + c_4\phi_{a_2,2}$ . Hors  $(H - E.Id)\psi = 0$ , on va donc avoir des solutions pour lesquelles  $c_3 = 0$  et  $c_4 = 0$ , et d'autres pour lesquelles  $c_1 = 0$  et  $c_2 = 0$  (car on ne mélange pas des orbitales de symétries différentes). On va chercher par exemple une orbitale qui résulte de la combinaison de  $\phi_{b_1,1}$  et  $\phi_{b_1,2}$ . On ne garde qu'une seule des deux équations du système car l'autre est similaire (vu qu'on a annulé le déterminant), et on utilise la normalisation comme seconde équation :

$$\begin{aligned}xc_1 + c_2 &= 0 \\ c_1^2 + c_2^2 &= 1\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à remplacer  $x$  par une des solutions de  $x(x + 1) - 1 = 0$ , et nous prendrons  $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1,618$  pour l'exemple. On trouve  $c_1 = 0,526$  et  $c_2 = 0,851$ . On a donc après normalisation :

$$\psi_1 = 1b_1 = c_1\phi_{b_{1,1}} + c_2\phi_{b_{1,2}} = 0,37(p_1 + p_4) + 0,60(p_2 + p_3)$$

qui est l'OM la plus basse en énergie du butadiène. On a donc simplifié beaucoup le problème puisqu'on est passé d'un déterminant  $4 \times 4$  à deux déterminants  $2 \times 2$  solubles à la main.

## 8.8 Règle de Hückel

L'aromaticité est un concept de grande importance en chimie organique, qui n'a pas trouvé de définition rigoureuse (on en rencontre plus d'une dizaine de définitions). L'une d'entre elle est liée à la méthode de Hückel, et *considère comme aromatique tout hydrocarbure insaturé cyclique avec  $4n+2$  électrons  $\pi$*  (pour  $n = 1$  on a par exemple le benzène ou l'anion cyclopentadiényle). Ces hydrocarbures tendent à avoir une énergie de délocalisation maximale. Avec la définition précédente, *les systèmes à  $4n$  électrons  $\pi$  sont appelés anti-aromatiques* (le cyclobutadiène avec  $n = 1$  par exemple). Leur énergie de délocalisation est nulle et ils ont tendance à se distordre pour se stabiliser.

## 8.9 Méthode de Hückel étendue

Cette méthode date de 1963. Elle s'applique aussi bien aux orbitales  $\sigma$  qu'aux orbitales  $\pi$ . Cette une méthode qui a connue son heure de gloire, et qui est encore parfois utilisée en recherche pour calculer des énergies relatives ou comme calcul préliminaire d'un problème compliqué. La première approximation (et la plus grosse) est celle des électrons indépendants. La deuxième est l'utilisation de la relation de Wolfsberg-Helmholtz :

$$h_{ij} = 1,75 \frac{h_{ii} + h_{jj}}{2} S_{ij}$$

On retrouve dans cette approximation le fait que  $h_{ij}$  (i.e.  $\beta_{ij}$ ) et  $S_{ij}$  sont proportionnels. On calcule  $S_{ij}$  numériquement en écrivant les orbitales atomiques comme des orbitales de Slater, et  $h_{ii}$  est égale à l'énergie de l'électron dans l'atome isolé. Cette méthode n'est pas commode à utiliser à la main et sans ordinateurs, c'est pourquoi je ne pense pas que vous la rencontrerez dans une épreuve.

## 9 Réactivité

Lorsqu'une réaction chimique a lieu et que deux réactifs s'approchent, il peut y avoir répulsion entre les nuages électroniques. S'il n'y avait pas d'interaction stabilisante mise en jeu, pour rompre une liaison il faudrait apporter  $\sim 100$  kcal/mol. Or les réactions qu'on observe aux températures usuelles ont des barrières d'activation d'au plus  $\sim 20$  kcal/mol. C'est l'interaction et le recouvrement entre OM qui permet de délocaliser les électrons, stabiliser les états de transition, et donc abaisser les barrières.

Les réactions chimiques peuvent être contrôlées par deux grandes familles d'interactions : le contrôle de charge, si l'interaction principale est électrostatique, ou le contrôle frontalier (ou contrôle orbitalaire) si l'interaction principale est le recouvrement entre orbitales. La découverte des premières réactions sous contrôle frontalier a beaucoup intrigué les chimistes de l'époque, qui les considéraient comme des "réactions sans mécanismes". Nous ne nous intéressons ici qu'au contrôle frontalier, qui permet par exemple d'expliquer la réaction de Diels-Alder.

### 9.1 Orbitales frontières et règle de Fukui

L'orbitale la plus haute occupée d'un système se note HO ("HOMO" en anglais) et l'orbitale la plus basse vacante se note BV ("LUMO" en anglais). Ces deux orbitales sont appelées *orbitales frontières* (OF). Lorsque deux réactifs s'approchent, n'importe quelle orbitale de l'un peut potentiellement interagir avec n'importe quelle orbitale de l'autre. Il y a donc un grand nombre d'interactions à considérer. On peut cependant simplifier le problème (cf Figure 33) :

- l'interaction entre deux OM vacantes n'apportera ni stabilisation ni déstabilisation car il n'y a pas d'électrons et ne sera donc pas considérée ;
- l'interaction entre deux OM occupées (i.e. à quatre électrons) apportera surtout de la déstabilisation (car  $|\Delta E_+| < |\Delta E_-|$ , cf Partie 7.1.7) et ne sera donc pas considérée. Nous précisons ici que ce sont ces interactions qui sont à l'origine de la gêne stérique ;
- l'interaction entre une OM occupée et une OM vacante sera stabilisante.

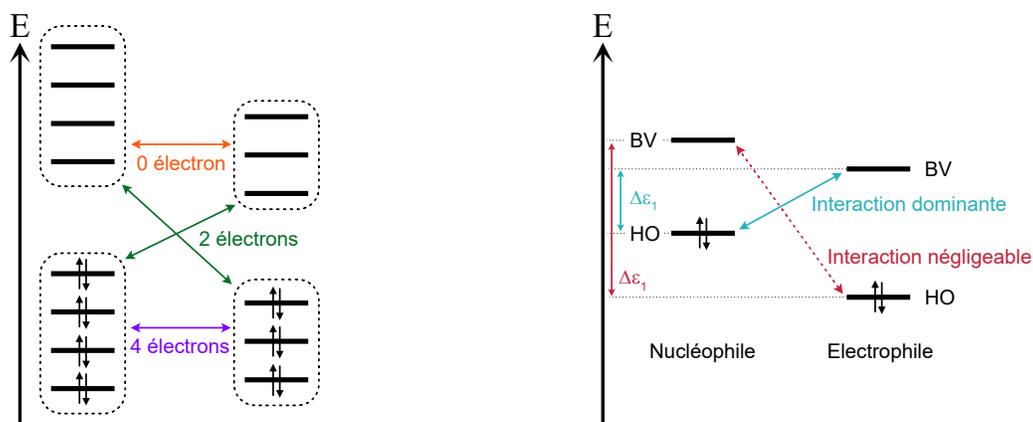


FIGURE 33 – Interactions entre orbitales, et illustration de la règle de Fukui.

Comme les interactions stabilisantes sont proportionnelles à  $S^2/\Delta\epsilon$  (où  $S$  est le recouvrement et  $\Delta\epsilon$  la différence d'énergie entre les deux orbitales), on ne considérera

que les interactions où la différence d'énergie entre les deux OM est faible. D'où l'approximation suivante, appelée règle de Fukui : *on considérera en priorité les interactions entre la HO d'un fragment et la BV de l'autre*. Il n'y a donc que deux interactions entre orbitales à considérer.

### Électrophile et nucléophile

On peut définir un nucléophile comme *un composé ayant sa HO assez haut en énergie* et un électrophile comme *un composé ayant sa BV assez bas en énergie*. On retrouve donc le fait qu'un nucléophile a des électrons hauts en énergie et peut céder un doublet électronique, et qu'un électrophile peut accepter un doublet. En générale, les HO et BV de chaque groupe ont des énergies différentes. On peut donc encore simplifier la règle de Fukui en considérant qu'*on ne regardera que l'interaction entre les deux orbitales de plus proches énergies, i.e. celle entre la HO du nucléophile et la BV de l'électrophile* (cf Figure 33).

## 9.2 Contrôle frontalier

D'autres types de réaction que celle de Diels-Alder peuvent être expliqués par la théorie des OF. C'est le cas de l'ensemble des réactions dites "péricycliques". Woodward et Hoffmann ont proposé des règles qui permettent d'expliquer ces réactions et en prédire le produit majoritaire. Hoffmann a reçu (avec Fukui) le prix Nobel de chimie en 1981 pour ces travaux. De manière générale, l'étude des interactions entre OM/OF permet de répondre à plusieurs questions importantes de la chimie organique :

- pour la réactivité absolue ("A et B vont-ils réagir ensemble?"), c'est la symétrie des orbitales HO et BV qui aura une importance (car en plus de  $\Delta\varepsilon$  il faut considérer  $S$ ) ;
- pour la réactivité relative ("A préférera-t-il réagir avec B ou C?") c'est la comparaison de l'énergie des HO et BV qui aura une importance (pour avoir  $\Delta\varepsilon$  le plus faible possible) ;
- pour la régiosélectivité ("si A a deux sites réactifs, où B attaquera-t-il?"), l'attaque se fera sur l'atome avec le plus gros coefficient  $c_i$  en valeur absolue pour maximiser le recouvrement  $S$  ;
- pour la stéréosélectivité ("pour un même site de A, quel est le meilleur chemin pour l'approche de B?"), c'est le recouvrement  $S$  qui aura une importance.

Nous ne rentrerons pas dans les détails ici, mais nous donnons quelques exemples ci-dessous. Il semble important de préciser qu'au cours d'une réaction chimique, les OM évoluent (en forme et en énergie) car l'environnement change lorsque les atomes se rapprochent. Les énergies des OF ont tendance à plus se rapprocher que les autres OM, et si (et seulement si) la symétrie entre couples HO/BV est bonne alors il pourra y avoir une réaction.

## 9.3 Exemple de la réaction de Diels-Alder

Nous prenons l'exemple de la réaction de Diels-Alder (Diels et Alder ont reçu le prix Nobel de chimie en 1950 pour la découverte de cette réaction). En général, on ne parle pas de nucléophile et d'électrophile pour cette réaction car il y a des flux d'électrons dans les deux sens et les substituants des deux partenaires peuvent influencer

sur la position des OF. Cependant, pour une réaction dite “normale”, l'alcène est plus électrophile et le diène est plus nucléophile. La conjugaison du diène est nécessaire pour que la réaction ait lieu, et l'exemple typique est le butadiène. Pour sa réaction avec l'éthylène, seules les orbitales  $\pi$  des deux réactifs sont importantes (le squelette  $\sigma$  ne change pas au cours de la réaction) et on représente les orbitales  $\pi$  sur la Figure 34. On constate qu'il peut y avoir interaction entre les deux couples d'OF car les recouvrements seront tous favorables.

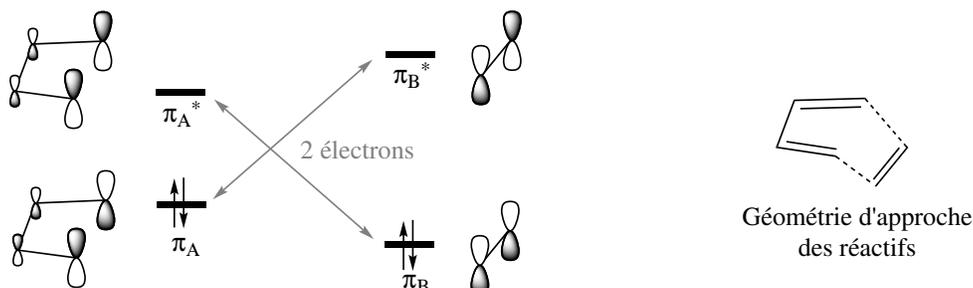


FIGURE 34 – Interactions entre OF au cours de la réaction de Diels-Alder.

Le recouvrement est tellement important qu'il peut à lui seul expliquer la régiosélectivité de la réaction. Dans l'exemple Figure 35 à gauche, un des produits est majoritaire. Il y a en effet deux orientations possibles entre les réactifs (formation des liaisons 1-1' et 4-2', ou 1-2' et 4-1'). On donne à droite les positions énergétiques des OF et on constate que l'interaction  $\pi_A/\pi_B^*$  est dominante par rapport à  $\pi_B/\pi_A^*$  (écart énergétique plus faible). On donne aussi la valeur des coefficients  $c_i$  dans les OF, et on constate que pour l'interaction  $\pi_A/\pi_B^*$  les plus gros coefficients sont sur 1 et 2' respectivement. C'est donc si ces deux atomes interagissent en premier qu'il y aura le plus gros recouvrement. Ceci explique la régiosélectivité de la réaction.

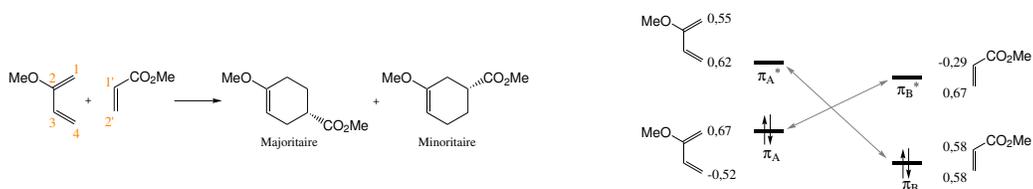


FIGURE 35 – Régiosélectivité de la réaction de Diels-Alder.

Dans le cas de la Figure 35, après avoir déterminé qu'on fera des liaisons entre 1-2' et 4-1', il reste deux possibilités pour l'orientation relative des réactifs, qui donneront lieu au produit R ou S. La “règle de l'endo” nous indique que l'approche préférée sera celle qui fera intervenir des interactions secondaires stabilisantes entre les substituants des réactifs (Figure 36).

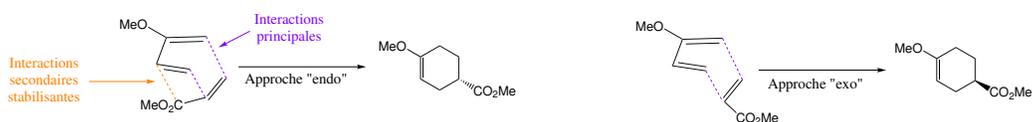


FIGURE 36 – Stéréosélectivité de la réaction de Diels-Alder.

## 9.4 Assistance électrophile

Les composés carbonylés ( $C = O$ ) sont des intermédiaires utilisés en synthèse organique comme électrophiles (une forme mésomère faisant intervenir une charge + sur le carbone) et réagissent donc *via* leur orbitale  $\pi^*$ . Il est usuel d'exalter leurs réactivités à l'aide d'un cation métallique  $M^+$  qui se lie à l'oxygène. L'explication de ce gain de réactivité est présentée Figure 37 : lorsque le cation se lie à l'oxygène, il va abaisser le niveau énergétique de l'OA  $2p$ . Ceci va avoir pour conséquence directe d'abaisser le niveau énergétique de l'OM  $\pi^*$  qui est la BV et qui pourra donc réagir plus facilement avec la HO d'un nucléophile.

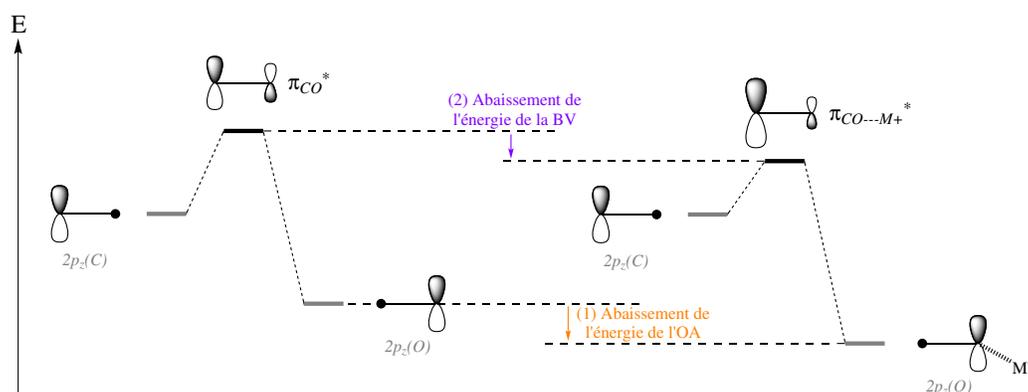


FIGURE 37 – Assistance électrophile d'un carbonyle par un cation métallique.

## 9.5 Effets électroniques des substituants

L'ajout de substituants donneurs ou attracteurs sur une molécule modifie la position énergétique des OM, ce qui peut expliquer ensuite les changements de réactivité observée en chimie organique. Le comportement est le même que pour l'assistance électrophile dont nous venons de parler, et nous ne détaillerons pas cette partie.

## 10 Absorption de photon et spectroscopies

### 10.1 Transitions entre OM

Les énergies associées aux longueurs d'onde de l'ultraviolet, du visible, et du proche infrarouge sont proches des écarts énergétiques entre les OM. De manière similaire à ce qui a été vu pour les OA, un électron sur une OM  $\sigma$  (par exemple) peut être absorbé par une molécule et passer sur l'OM  $\sigma^*$  en absorbant un photon dont la longueur d'onde correspond à la différence d'énergie entre les deux OM. C'est le principe de la spectroscopie UV-Visible, où on peut étudier l'ensemble de la molécule en excitant ses électrons.

En absorbant un photon, on peut donc faire passer un électron d'une OM occupée à une OM vacante ; une molécule d'eau peut par exemple passer de l'état fondamental  $(1a_1)^2 (1b_2)^2 (2a_1)^2 (1b_1)^2$  à un état excité  $(1a_1)^2 (1b_2)^2 (2a_1)^2 (1b_1)^1 (3a_1)^1$ . La structure électronique changeant, la géométrie de la molécule va changer ainsi que ses propriétés et sa réactivité. Par exemple, le pKa du phénol est 10 à l'état fondamental et 4,1 à l'état excité. Citons aussi le cétène  $\text{H}_2\text{C}=\text{C}=\text{O}$  qui peut se dissocier en  $\text{H}_2\text{C}$  et CO lorsqu'il est à l'état excité.

### 10.2 Spectroscopie UV-Visible

Vu ce qui a été dit précédemment et vu les spectres atomiques (des raies fines autour d'une longueur d'onde), on pourrait s'attendre à ce que les bandes observées soient des pics centrés sur chaque longueur d'onde correspondant exactement à une différence d'énergie entre deux OM. Il ne faut cependant pas oublier que chaque molécule est toujours en train de vibrer : les liaisons covalentes et les angles se comportent comme de petits ressorts et donc la distance entre les atomes évolue autour d'une position d'équilibre. A un instant donné, chaque molécule est donc dans une géométrie différente des autres, ce qui implique de petites différences sur les orbitales. De plus, les molécules du solvant peuvent être placées différemment autour de chaque molécule. La position des niveaux d'énergies des OM est donc différente pour chaque molécule en solution car la géométrie de la molécule et le solvant sont différents. On observe donc des bandes larges comme celles présentées Figure 38. La phénolphthaléine absorbe autour de 370 nm et 550 nm. Ces absorptions correspondent à des différences d'énergie de 3,35 et 2,26 eV respectivement, et on constate en observant les niveaux énergétiques des OM que cette différence pourra être obtenue entre une OM peuplée et une OM vide (les énergies des OM sont ici approximatives). Il faut cependant ajouter qu'on ne peut pas faire passer un électron d'une OM occupée vers n'importe quelle OM : la mécanique quantique impose des règles de transition ce qui explique la présence de seulement deux pics dans le visible.

### 10.3 Exemple d'absorptions entre deux OM

Plus une molécule est grosse, plus elle a d'OM et de niveaux énergétiques, et donc plus il y aura de transitions. Cependant, certaines transitions sont impossibles à faire (en raison des règles de la mécanique quantique) et toutes les transitions ne sont pas dans le domaine spectral de l'UV-Visible. On donne ci-dessous des exemples d'absorption de photons :

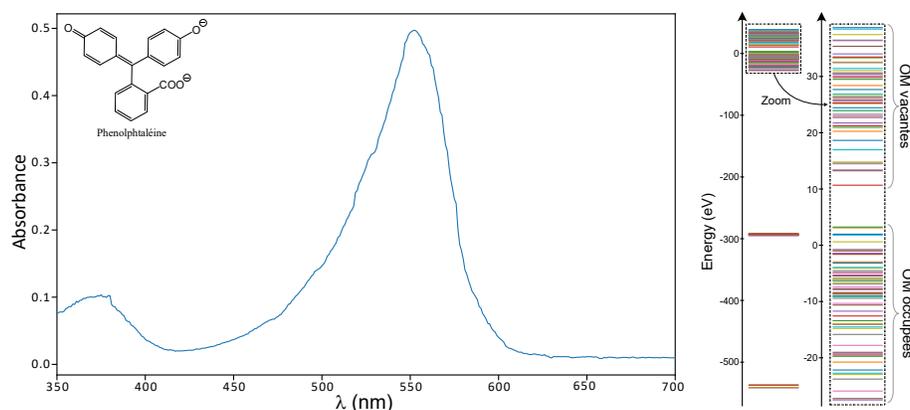


FIGURE 38 – Spectre d'absorption de la phénolphtaléine et diagramme d'OM (les niveaux énergétiques ne sont qu'approximatifs en raison de la méthode de calcul).

- Plus il y a de doubles liaisons conjuguées dans une molécule, plus l'écart énergétique entre la  $\pi$  et la  $\pi^*$  diminue, et donc plus la longueur d'onde d'absorption augmente : l'éthylène absorbe à 170 nm et le butadiène absorbe à 220 nm. Avec six liaisons doubles conjuguées, l'absorption se fait à  $\sim 400$  nm. On présente Figure 39 la structure du carotène qui a 11 liaisons doubles conjuguées et qui absorbe des longueurs d'onde autour de 450 nm. C'est cette molécule qui est responsable de la couleur des carottes et des flamands roses.

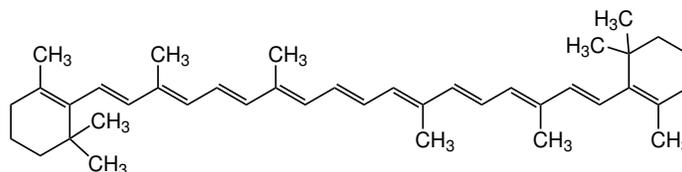


FIGURE 39 – Structure du carotène.

- A l'état excité, la libre rotation autour d'une double liaison devient possible. Le rétinol est un photorécepteur de nos yeux (Figure 40), et lorsqu'il absorbe un photon, la double liaison bleue peut changer de configuration et donner le produit indiqué. Ce changement implique un changement de conformation d'une enzyme, ce qui envoie un signal au cerveau, et nous permet de voir.

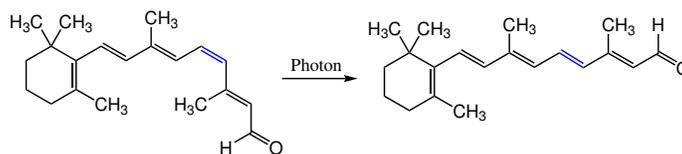


FIGURE 40 – Changement de configuration du rétinol après absorption d'un photon.

- Les ions métalliques donnent souvent lieu à des solutions colorées. Par exemple, lorsque l'ion  $\text{Cu}^{2+}$  est dans l'eau il s'entoure de six molécules et l'édifice  $\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_6^{2+}$  absorbe la lumière à environ 770 nm et on le voit donc bleu-vert. L'oxyde de fer (solide de formule  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) est quant à lui rouge et est la raison pour laquelle la rouille est rouge.

## 11 Calculs de chimie quantique

Nous avons vu précédemment comment **dessiner** des orbitales dans les cas simples. Nous allons ici décrire (brièvement) les **calculs** d'orbitales, essentiellement afin de pouvoir répondre à des questions du jury. En pratique, pour faire un calcul, on a juste besoin de connaître les positions x/y/z d'un ensemble d'atomes, la charge de l'édifice et son spin total (et choisir la méthode).

### 11.1 Méthode du champ auto-cohérent

Un point commun à l'ensemble des méthodes décrites ci-dessous est l'utilisation de la **méthode du champ auto-cohérent** (*self consistent field* en anglais). Lorsqu'on a un jeu d'orbitales de départ, on peut résoudre l'équation de Schrödinger (avec quelques approximations) et obtenir de nouvelles orbitales. Si les nouvelles orbitales sont "cohérentes" avec celles de départ (i.e. si la nouvelle énergie du système est suffisamment proche de l'ancienne énergie), le champ électrostatique issu des orbitales de départ est considéré comme étant "auto-cohérent" puisqu'il régénère les mêmes orbitales que celles de départ. On considère alors ces orbitales comme valides.

Concrètement, il faut partir d'un ensemble d'orbitales de départ (appelons les {OM-0}). Cela peut être des orbitales issues de la méthode de Hückel étendue par exemple. On résout alors un ensemble d'équations, qui donne lieu à de nouvelles orbitales (qu'on va appeler ici {OM-1}) et à une première énergie du système ( $E_1$ ). Puis on réitère la résolution des équations avec les orbitales {OM-1} comme point de départ. On obtient un ensemble d'orbitales {OM-2} et une énergie  $E_2$ . Si  $E_2$  et  $E_1$  sont suffisamment proches (typiquement,  $E_2 - E_1 < 10^{-8}$  Hartree) alors on arrête le calcul. Si la différence d'énergie est supérieure au critère de convergence, on recommence une itération. On arrive souvent à converger le calcul en 15 à 20 cycles.

### 11.2 Les différentes familles de méthodes

Il existe deux grandes familles de méthodes pour résoudre (approximativement) l'équation de Schrödinger. Ces deux familles sont elles-mêmes divisées en sous-familles.

1. Certaines méthodes utilisent directement la fonction d'onde (*wave function theories* en anglais, ou WFT). La méthode Hartree-Fock et les méthodes post-Hartree-Fock s'appellent des méthodes *ab initio* ("à partir de rien", parce qu'elles utilisent très peu d'hypothèses).
  - La base de ces méthodes s'appelle la **méthode Hartree-Fock** (ou HF) : elle repose sur une approche de champ moyen (chaque électron ne voit qu'un potentiel électrostatique moyen) ce qui lui permet d'être rapide mais a pour conséquence de négliger la corrélation électronique (i.e. dans la méthode Hartree-Fock les électrons ne se "voient" pas directement les uns les autres puisqu'ils ne ressentent qu'un potentiel moyen).
  - Pour prendre en compte la corrélation électronique, on peut utiliser des méthodes plus compliquées qu'on regroupe dans la famille des **méthodes post-Hartree-Fock**. Des acronymes connus sont ici MP2, CI ou CCSD(T).
  - On peut aussi choisir de simplifier la méthode Hartree-Fock pour faire des calculs plus rapides (soit parce qu'on veut les faire sur un très gros système, soit parce qu'on veut en faire des millions), et on regroupe alors ces méthodes simplifiées dans la famille des **méthodes semi-empiriques**.

2. D'autres méthodes n'utilisent pas directement les fonctions d'ondes mais plutôt la densité électronique (**théorie de la fonctionnelle de la densité**, ou DFT pour *density functional theory*). Une fonctionnelle est un objet mathématique qui est une fonction de fonction et qui donne un nombre. Par exemple, l'objet "intégrale sur  $x$  entre 0 et 1" est une fonctionnelle, qui appliquée à la fonction  $f(x) = x^2$  donne le nombre  $1/3$ . L'idée de la DFT est d'avoir une fonctionnelle qui prend en entrée la densité électronique et donne en sortie l'énergie du système. On utilise des fonctions similaires aux OM pour construire la densité et les équations de résolution sont très similaires à celles de Hartree-Fock (i.e. un temps de calcul comparable). Mais il y a une dose d'empirique dans la DFT puisqu'on peut adapter la fonctionnelle, et on peut ainsi prendre en compte la corrélation électronique. C'est donc une méthode très utilisée à l'heure actuelle. Il existe des centaines de fonctionnelles, la plus connue (malgré ses défauts) pour la chimie organique est B3LYP et pour la chimie du solide on peut citer PBE. B3LYP est utilisée pour les calculs de vibration par OrbiMol.

### 11.3 Les bases d'orbitales

Pour trouver les OM, on les écrit comme une combinaison linéaire des OA. Les OA des différents atomes sont proportionnelles à  $e^{-\zeta r}$  ce qui pose un problème numérique. En effet, dans les méthodes décrites ci-dessous, il va falloir calculer les intégrales du produit de plusieurs OA et intégrer les produits de fonctions  $e^{-\zeta r}$  n'est pas efficace pour un ordinateur. Il est par contre beaucoup plus facile d'intégrer des produits de fonctions gaussiennes ( $e^{-\zeta r^2}$ ). Comme les deux types de fonctions ont des comportements assez différents, on utilise plusieurs gaussiennes pour mimer chaque fonction de type  $e^{-\zeta r}$ . On appelle "base d'orbitales" un ensemble de paramètres qui décrivent des gaussiennes, elles-mêmes permettant de décrire les OA. Les vibrations calculées par OrbiMol l'ont été avec la base 6-311+G(d,p) et cet acronyme signifie :

- Les orbitales atomiques de coeur de tous les atomes sont décrites par une somme de 6 gaussiennes, dont les coefficients dans la somme sont fixes.
- Les orbitales de valence sont décrites par trois fonctions (trois parce qu'il y a trois nombres après le six : 3/1/1). La première fonction est une somme de trois gaussiennes (plutôt proches du noyau), les deux autres fonctions ne sont constituées que de une gaussienne (de plus en plus éloignées du noyau).
- Le "G" dans le nom signifie que les fonctions sont des gaussiennes.
- Pour pouvoir décrire des anions (qui sont plus gros que les molécules neutres), il faut ajouter des fonctions *diffuses* i.e. qui s'éloignent plus des noyaux. On fait cela avec des fonctions du même type que pour les orbitales de valence, mais qui ont une plus grande expansion spatiale. Le "+" dans le nom de la base indique qu'on a fait cela sur tous les atomes lourds. Si on avait écrit "++", on l'aurait fait aussi pour les atomes d'hydrogènes.
- Il faut pouvoir autoriser les orbitales à se déformer. Par exemple, la  $1s$  d'un hydrogène doit pouvoir être légèrement ovoïde sous l'effet de la polarisation. On peut pour cela ajouter à la base des orbitales de *polarisation* qui sont des orbitales de nombre quantique supérieure aux OA de valence (par exemple des orbitales  $p$  pour l'hydrogène et des orbitales  $d$  pour les éléments de la deuxième période). C'est ce qui est indiqué par la parenthèse "(d,p)" (ou parfois par \*\*).

Comme il y a trois fonctions pour les orbitales de valence, cette base est une base “triple zeta”. On rencontre aussi des bases double, quadruple, quintuple zeta ...

Quand on décrit les OM avec la méthode CLOA, on cherche les coefficients devant chaque OA. Plutôt que d’écrire une OM  $\phi$  sous la forme  $a_1 1s_C + a_2 2s_C + \dots$  (où les inconnues sont les  $a_i$ ), on l’écrira pour le calcul avec une base 6-311+G(d,p) :

$$\begin{aligned} \phi = & b_1 \left( A_1 e^{-\zeta_1 r^2} + A_2 e^{-\zeta_2 r^2} + A_3 e^{-\zeta_3 r^2} + A_4 e^{-\zeta_4 r^2} + A_5 e^{-\zeta_5 r^2} + A_6 e^{-\zeta_6 r^2} \right) \left. \vphantom{b_1} \right\} \approx a_1 1s_C \\ & + b_2 \left( A_7 e^{-\zeta_7 r^2} + A_8 e^{-\zeta_8 r^2} + A_9 e^{-\zeta_9 r^2} \right) + b_3 \left( A_{10} e^{-\zeta_{10} r^2} \right) + b_4 \left( A_{11} e^{-\zeta_{11} r^2} \right) \left. \vphantom{b_2} \right\} \approx a_2 2s_C \\ & + b_5 \left( A_{12} e^{-\zeta_{12} r^2} \right) \left. \vphantom{b_5} \right\} \text{ fonction diffuse (i.e. avec } \zeta_{12} \text{ faible) pour améliorer } 2s_C \\ & + b_6 \left( A_{13} e^{-\zeta_{13} r^2} \right) \left. \vphantom{b_6} \right\} \text{ fonction de polarisation de type } d \text{ pour améliorer } 2s_C \\ & + \dots \end{aligned}$$

où les inconnues sont alors les  $b_i$ . On augmente le nombre d’inconnues, mais comme le calcul est beaucoup plus rapide avec des gaussiennes cela reste plus efficace. Très concrètement, en allant sur le site <https://www.basissetexchange.org/> on peut trouver tous les paramètres  $A_i$  et  $\zeta_i$  pour des centaines de bases et pour chaque élément.

## 11.4 Méthode Hartree-Fock

On reprend là où nous nous étions arrêtés Chapitre 5.5. La fonction d’onde totale est écrite comme un déterminant de Slater :

$$\psi(1, 2, \dots, n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \phi_\alpha(1) & \phi_\alpha(2) & \dots & \phi_\alpha(n) \\ \phi_\beta(1) & \phi_\beta(2) & \dots & \phi_\beta(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_\omega(1) & \phi_\omega(2) & \dots & \phi_\omega(n) \end{vmatrix}$$

où les OM  $\phi_i$  sont des spin-orbitales mono-électroniques. Après avoir appliqué l’approximation de Born-Oppenheimer, le hamiltonien électronique s’écrit :

$$\hat{\mathcal{H}}_{elec} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{A=1}^M \frac{Z_A}{r_{iA}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j<i} \frac{1}{r_{ij}} = \hat{T}_{elec} + \hat{V}_{Ze} + \hat{V}_{ee}$$

et on le re-écrit en faisant apparaître des termes mono- et bi-électroniques :

$$\hat{\mathcal{H}}_{elec} = \sum_{i=1}^n \hat{h}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j<i} \frac{1}{r_{ij}} \quad \text{avec} \quad \hat{h}_i = -\frac{1}{2} \nabla_i^2 - \sum_{A=1}^M \frac{Z_A}{r_{iA}}$$

L’énergie électronique du système s’écrit  $E_{elec} = \langle \psi | \hat{\mathcal{H}}_{elec} | \psi \rangle$  (si la fonction d’onde est normée), et en développant on peut écrire l’énergie comme :

$$E_{elec} = \sum_{i=1}^n \left\langle \phi_i(i) \left| \hat{h}_i \right| \phi_i(i) \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i<j} \left\langle \phi_i(i) \phi_j(j) \left| \frac{1}{r_{ij}} \right| \phi_i(i) \phi_j(j) \right\rangle - \left\langle \phi_i(i) \phi_j(j) \left| \frac{1}{r_{ij}} \right| \phi_j(i) \phi_i(j) \right\rangle$$

Le premier terme consiste en une somme d'intégrales mono-électroniques. Les deux derniers termes (dont la différence vient de l'échange d'indices dans la partie de droite du dernier terme) sont des sommes d'intégrales bi-électroniques. Ils s'écrivent :

$$\begin{aligned} h_i &= \left\langle \phi_i(i) \left| \hat{h}_i \right| \phi_i(i) \right\rangle = \int \phi_i^*(i) \hat{h}_i \phi_i(i) dr_i \\ J_{ij} &= \left\langle \phi_i(i) \phi_j(j) \left| \frac{1}{r_{ij}} \right| \phi_i(i) \phi_j(j) \right\rangle = \int \phi_i^*(i) \phi_j^*(j) \frac{1}{r_{ij}} \phi_i(i) \phi_j(j) dr_i dr_j \\ K_{ij} &= \left\langle \phi_i(i) \phi_j(j) \left| \frac{1}{r_{ij}} \right| \phi_j(i) \phi_i(j) \right\rangle = \int \phi_i^*(i) \phi_j^*(j) \frac{1}{r_{ij}} \phi_j(i) \phi_i(j) dr_i dr_j \end{aligned}$$

Les termes  $J_{ij}$  et  $K_{ij}$  introduits ci-dessus s'appellent des intégrales de Coulomb et d'échange. L'intégrale d'échange  $K_{ij}$  n'est non nulle que si les spin-orbitales  $\phi_i$  et  $\phi_j$  ont même spin et c'est ce terme qui explique la règle de Hund et les exceptions dues aux sous-couches remplies ou demi-remplies du chrome et du cuivre (cf Partie 4.5.3). Il est utile d'introduire également les *opérateurs* de Coulomb et d'échange  $\hat{J}_i$  et  $\hat{K}_i$  :

$$J_{ij} = \langle \phi_j | \hat{J}_i | \phi_j \rangle \quad \text{et} \quad K_{ij} = \langle \phi_j | \hat{K}_i | \phi_j \rangle$$

Nous allons ensuite utiliser le principe variationnel : pour toute fonction  $\psi$  décrivant un système,  $\langle \psi | \hat{\mathcal{H}} | \psi \rangle \geq E_{\text{fondamentale}}$ . Il va donc falloir minimiser l'énergie électronique et cela se fait avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, avec pour contrainte d'avoir des OM orthonormées. Après avoir développé les calculs, on arrive aux équations de Hartree-Fock où  $\hat{F}_i$  s'appelle l'opérateur de Fock (valable pour chaque OM  $\phi_i$ ) :

$$\hat{F}_i \phi_i = \varepsilon_i \phi_i \quad \text{avec} \quad \hat{F}_i = \hat{h}_i + \sum_j \left( \hat{J}_j - \hat{K}_j \right)$$

Ce sont des équations aux valeurs propres. Pour résoudre l'équation et obtenir  $\phi_i$ , il faut connaître  $\hat{J}_j$  et  $\hat{K}_j$  et donc l'ensemble des  $\phi_j$ . C'est pour cela qu'on utilise l'approche itérative du champ auto-cohérent. On constate que les intégrales  $J_{ij}$  et  $K_{ij}$  impliquent quatre orbitales : si il y a  $N$  fonctions dans la base, un calcul Hartree-Fock a donc un coût proportionnel à  $N^4$ . En écrivant les OM sous la forme  $\phi_i = \sum_j c_{ij} \chi_j$  (où les  $\chi_j$  sont les OA) puis en projetant, les équations de Hartree-Fock peuvent être exprimées comme un problème matriciel plus facile à résoudre.

## 11.5 Méthodes semi-empiriques

Pour simplifier les calculs de la méthode Hartree-Fock, on peut commencer par négliger les électrons de cœur et diminuer la charge du noyau. On peut également utiliser une base minimale (i.e. la plus petite possible) pour chaque atome. On peut ensuite faire plusieurs types d'approximations. L'une d'entre elles considère que le produit de deux orbitales de la base placées sur des atomes différents est nul : cette hypothèse annule beaucoup de termes et accélère le calcul. En contrepartie, les résultats sont moins satisfaisants et certaines intégrales sont donc pré-calculées puis modifiées pour reproduire des données expérimentales. On appelle donc ces méthodes des approches "semi-empiriques", et elles contiennent en général de nombreux paramètres. Comme le but est ici de simplifier les calculs en ayant calculé à l'avance certains paramètres,

les bases d'orbitales sont pré-définies et n'ont pas besoin d'être spécifiées.

Selon ce qu'on néglige dans les intégrales, on rencontre différents acronymes : ZDO (zero differential overlap), CNDO (complete neglect of differential overlap), MNDO (modified neglect of differential overlap) ... (on ne les cite pas tous). Ces méthodes ont été développées dans les années 1960 quand les ordinateurs n'avaient pas la puissance d'aujourd'hui. Les premières approximations étaient donc fortes. Elles ont ensuite continué à être améliorées (d'où la succession d'acronymes) en raffinant les approximations. La méthode AM1 (utilisée par OrbiMol) date de 1985 ; elle a été finalisée à Austin (au Texas) d'où le nom Austin Model 1. D'autres exemples connus sont issus de la famille des PM pour *parametrization method* : la méthode PM3 date de 1989 (le 3 signifie que c'est le 3<sup>ème</sup> jeu de paramètres de la famille MNDO, AM1 étant le deuxième jeu de paramètres). La méthode PM6 date de 2007 et la plus récente PM7 de 2013 ; des améliorations de PM7 continuent d'être publiées actuellement.

## 11.6 Théorie de la fonctionnelle de la densité

Comme nous l'avons rappelé au début de la partie sur la méthode Hartree-Fock, le hamiltonien peut s'écrire comme somme de trois termes :  $\hat{\mathcal{H}}_{elec} = \hat{T}_{elec} + \hat{V}_{Ze} + \hat{V}_{ee}$ . Il a été démontré qu'il est possible de calculer l'énergie associée avec uniquement des fonctionnelles. Le problème qu'on rencontre alors est qu'on ne sait pas écrire la forme de la fonctionnelle exacte qui résoudrait l'équation. On change donc la position du problème en faisant l'hypothèse que les électrons n'interagissent pas, et on peut alors écrire les énergies associées aux termes du hamiltonien dans ce cadre. On introduit ensuite une nouvelle fonctionnelle pour corriger cette (forte) hypothèse. L'énergie s'écrit alors (on note "[ $\rho$ ]" pour indiquer que les différents termes sont des fonctionnelles qui dépendent de la densité électronique) :

$$E_{DFT}[\rho] = T_S[\rho] + E_{Ze}[\rho] + J[\rho] + E_{xc}[\rho]$$

où  $T_S[\rho]$  est l'énergie cinétique des électrons,  $E_{Ze}[\rho]$  est l'énergie d'attraction noyaux-électrons,  $J[\rho]$  est l'intégrale de Coulomb (similaire à celle de la méthode Hartree-Fock) et  $E_{xc}[\rho]$  est la **fonctionnelle d'échange-corrélation**. Les trois premiers termes peuvent être calculés de manière exacte sous l'hypothèse d'électrons sans interactions.  $E_{xc}$  est la fonctionnelle qui sert à corriger toutes les hypothèses en regroupant un terme d'échange (équivalent à  $K_{ij}$  de la méthode Hartree-Fock) et un terme de corrélation pour corriger l'hypothèse des électrons qui n'interagissent pas. Il existe des fonctionnelles qui ne dépendent d'aucun paramètre, alors que d'autres récemment développées en utilisent environ 60. Pour résoudre les équations, on utilise des fonctions similaires aux OM (notées aussi  $\phi$ ) et on peut écrire la densité électronique  $\rho$  sous la forme :  $\rho(r) = \sum_{i, \text{occupées}} |\phi_i(r)|^2$ .

## 11.7 Réponses aux questions du jury

Résumons ce que nous avons décrit. Si le jury vous demande comment les OM de OrbiMol ont été calculées, vous pouvez répondre quelque chose qui ressemblera à :

Les OM de OrbiMol sont calculées avec la méthode AM1. C'est une méthode semi-empirique qui se base sur la méthode *ab initio* de Hartree-Fock, en la simplifiant avec des paramètres empiriques pour calculer moins

d'intégrales et accélérer le calcul. La résolution des équations est faite avec une approche du champ auto-cohérent.

## 12 Bonus - Spectroscopie atomique

On va maintenant s'intéresser à la réalité des atomes. Tout ce qu'on a vu jusqu'à présent n'était que théorique. Il ne faut pas oublier que la chimie est une science expérimentale, et que seuls les résultats de l'expérience permettent de rigoureusement démontrer des faits. Ici on va faire un brin de physique atomique, et construire la théorie qui permet d'interpréter les spectres d'émission des atomes. Ce chapitre est inspiré de "Introduction à la chimie quantique" de Claude Leforestier.

### 12.1 Perturbations

#### 12.1.1 Hamiltoniens de perturbations

Les fonctions d'onde écrites sous forme de déterminants de Slater ne sont qu'une approximation de la fonction d'onde exacte. En effet, nous avons jusqu'à présent moyenné l'énergie de répulsion électronique sous l'effet d'un champ moyen : les électrons ne se "voient" donc pas les uns les autres et ce qu'on appelle la *corrélacion électronique* n'est pas pris en compte. Si un électron  $i$  évolue, le champ moyen peut rester inchangé, et alors cela n'aura aucun effet sur un autre électron  $j$ . Or en pratique les électrons sont liés, et chaque mouvement de l'un a des effets sur les autres. La corrélation électronique est ainsi au cœur de la bonne description des liaisons chimiques. Le hamiltonien complet peut s'écrire :  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}^0 + \hat{\mathcal{H}}_{cor}$  où  $\hat{\mathcal{H}}^0$  est le hamiltonien effectif dont nous nous sommes servis Partie 4.2. Le hamiltonien de corrélation tient compte de la répulsion exacte entre les électrons.

$$\hat{\mathcal{H}}^0 = \sum_i \left( -\frac{1}{2} \nabla_i^2 + V_i^{effectif} \right)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{cor} = \sum_i \left( \frac{Z}{r_i} + \sum_{j>i} \frac{1}{r_{ij}} - V_i^{effectif} \right)$$

On ne peut pas exprimer l'énergie associée à cet hamiltonien, car cela reviendrait à résoudre de façon exacte l'équation de Schrödinger. C'est pour cela qu'on va travailler avec la théorie des perturbations.

$\hat{\mathcal{H}}^0 + \hat{\mathcal{H}}_{cor}$  représente donc le hamiltonien exact que nous avons considéré jusqu'à présent. Or cet hamiltonien a été écrit dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste. Si on prend en compte les effets relativistes et l'équation de Dirac, on constate qu'il faut lui ajouter un terme,  $\hat{\mathcal{H}}_{SO}$ , lié au couplage spin-orbite (que nous détaillons Partie 12.1.2). Le hamiltonien complet s'écrit alors :

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}^0 + \hat{\mathcal{H}}_{cor} + \hat{\mathcal{H}}_{SO}$$

#### 12.1.2 Couplage spin-orbite

Dans un atome, les électrons bougent. Chaque électron a 2 mouvements caractérisés par le moment angulaire orbital  $\vec{l}$  et le moment angulaire de spin  $\vec{s}$ . Ces mouvements peuvent se coupler par le biais de  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ . Le couplage de ces moments s'appelle *couplage spin-orbite* et est dû strictement aux effets relativistes

des électrons<sup>20</sup>. Le terme perturbatif qu'on doit rajouter dans le hamiltonien  $\hat{\mathcal{H}}$  est proportionnel à  $Z^3 \vec{L} \cdot \vec{S}$ . Si on décompose  $(\vec{L} + \vec{S})^2$ , on peut écrire :

$$2\vec{L} \cdot \vec{S} = \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2$$

L'énergie d'un état  $(L, S, J)$  s'écrit alors (avec  $A \propto Z^3$ ) :

$$E_{L,S,J} = \frac{1}{2}hcA \left[ J(J+1) - L(L+1) - S(S+1) \right]$$

### 12.1.3 Ordre de perturbations

Les configurations électroniques données par la règle de Klechkowski sont des solutions de  $\hat{\mathcal{H}}^0$ . Ce qu'on va faire dans la suite, c'est essayer de trouver à partir d'une configuration électronique donnée les couplages énergétiques possibles ainsi que la dégénérescence de ces niveaux énergétiques. En effet, selon la position des électrons dans les spin-orbitales, la configuration n'a pas la même énergie (d'où la règle de Hund qui nous permet de trouver la plus stable). On va procéder par étapes, selon la perturbation qu'on regarde en premier.

1. Si les électrons sont en assez forte interaction, on les considèrera en bloc. On couplera donc les moments angulaires orbitaux ensemble ( $\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$ ) et les moments angulaires de spin ensemble ( $\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i$ ). On commencera par prendre en compte la répulsion exacte entre les électrons (en considérant  $\hat{\mathcal{H}}_{cor}$ ) par perturbation des configurations électroniques. On aura ainsi une première levée de dégénérescence (qui fera intervenir les nombres quantiques  $L$  et  $S$ ) et qui nous permettra de construire les *termes spectroscopiques*. Puis on fera le couplage entre ces moments ( $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ) et on prendra en compte le couplage spin-orbite. On fera intervenir le nombre quantique  $J$  en plus de  $L$  et  $S$  pour donner naissance aux *états spectroscopiques* dans une seconde levée de dégénérescence. Procéder dans cette ordre s'appelle *couplage L/S* ou *couplage de Russel-Saunders*. C'est valable pour les atomes légers soit environ jusqu'à  $Z = 40$ , i.e. les 4 premières périodes. Dans le champ du noyau, ces électrons sont dans un petit volume donc en forte interaction. On le schématise Figure 41, et ce sera le cas que nous allons étudier le plus.
2. Si les électrons sont assez indépendants, on commencera par faire le couplage des moments angulaires pour chaque électron indépendamment ( $\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$ ) (en considérant  $\hat{\mathcal{H}}_{SO}$ ). Puis on fera intervenir la corrélation et on fera le couplage total  $\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i$ . On a là aussi deux levées de dégénérescence successives. On appelle cette façon de faire *couplage j/j*. Il est surtout valable pour les électrons périphériques des atomes lourds qui sont éloignés les uns des autres donc relativement indépendants.

Sous l'effet d'un champ magnétique ou d'un champ électrique, on pourra faire une levée de dégénérescence supplémentaire (*effet Zeeman* et *effet Starck*), qui permettent de construire des *micro-états spectroscopiques*, mais nous n'en parlerons pas ici.

20. La structure d'un spectre dû au couplage spin-orbite s'appelle structure fine.

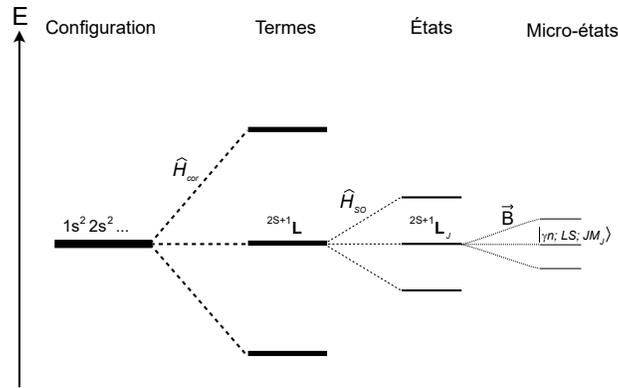


FIGURE 41 – Perturbations successives dans le cadre du couplage de Russel-Saunders (inspiré de “Introduction à la chimie quantique” de Claude Leforestier).

## 12.2 Moments angulaires - Rappels de mécanique quantique

Puisque nous allons nous intéresser à l'étude de moments angulaires<sup>21</sup>, nous allons faire quelques rappels de mécanique quantique. On définit le moment angulaire orbitale  $\vec{l}$ , le moment angulaire de spin  $\vec{s}$  ainsi que le moment angulaire total  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ . La mécanique quantique impose :

$$\begin{aligned}\|\vec{l}\| &= \hbar\sqrt{l(l+1)} \\ \|\vec{s}\| &= \hbar\sqrt{s(s+1)} \\ \|\vec{j}\| &= \hbar\sqrt{j(j+1)}\end{aligned}$$

où  $l$ ,  $s$  et  $j$  sont entiers ou demi-entiers. Il en est de même pour les moments angulaires polyélectroniques  $\vec{L}$ ,  $\vec{S}$  et  $\vec{J}$  définis par  $\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$ ,  $\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i$  et  $\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i$  :

$$\begin{aligned}\|\vec{L}\| &= \hbar\sqrt{L(L+1)} \\ \|\vec{S}\| &= \hbar\sqrt{S(S+1)} \\ \|\vec{J}\| &= \hbar\sqrt{J(J+1)}\end{aligned}$$

Puisque  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  et  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , et que ces six vecteurs doivent vérifier les relations précédentes, on démontre qu'on doit avoir :

$$\begin{aligned}|l - s| &\leq j \leq (l + s) \quad \text{par pas de 1} \\ |L - S| &\leq J \leq (L + S) \quad \text{par pas de 1}\end{aligned}$$

Soit  $A = L, S$  ou  $J$ . À  $\vec{A}$  est associé les opérateurs  $\hat{A}^2$  de valeur propre  $A(A+1)$  et  $\hat{A}_z$  de valeur propre  $M_A$  avec  $A$  et  $M_A$  des nombres quantiques tels que  $-A \leq M_A \leq A$  par pas de 1. On peut donc écrire que  $A = \max(M_A)$  :

$$\begin{aligned}-L &\leq M_L \leq L \quad ; \quad L = \max(M_L) \\ -S &\leq M_S \leq S \quad ; \quad S = \max(M_S) \\ -J &\leq M_J \leq J \quad ; \quad J = \max(M_J)\end{aligned}$$

21. Dans la résolution de l'équation de Schrödinger monoélectronique (pour laquelle nous avons admis les résultats), on se sert des moments angulaires dans la séparation des variables.

Les fonctions d'ondes polyélectroniques seront prises sous forme de déterminants de Slater et en les notant  $|LM_LSM_S\rangle$ , on aura :

$$\begin{aligned}\hat{L}^2|LM_LSM_S\rangle &= L(L+1)|LM_LSM_S\rangle & ; & \quad \hat{L}_z|LM_LSM_S\rangle = M_L|LM_LSM_S\rangle \\ \hat{S}^2|LM_LSM_S\rangle &= S(S+1)|LM_LSM_S\rangle & ; & \quad \hat{S}_z|LM_LSM_S\rangle = M_S|LM_LSM_S\rangle\end{aligned}$$

$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$  reste valable pour toute projection ; on a donc  $\vec{L}_z = \sum_i \vec{l}_{z_i}$ . Si on écrit ça en terme d'opérateurs et qu'on cherche la valeur propre, on trouve  $M_L = \sum_i m_{l_i}$ , les  $m_{l_i}$  étant les valeurs monoélectroniques. De même on aura  $M_S = \sum_i m_{s_i}$ . Au final on trouve :

$$M_J = M_L + M_S$$

### 12.3 Termes spectroscopiques des atomes

On se place dans le cadre du couplage L/S et on va travailler sur l'état fondamental du carbone pour l'exemple :  $1s^2 2s^2 2p^2$ . Occupons-nous d'abord des électrons  $1s$  et  $2s$  : une sous-couche complète a autant d'électrons  $\alpha$  ( $m_s = +$ ) que d'électrons  $\beta$  ( $m_s = -$ ) : on n'a donc pas le choix et  $M_S = 0$  d'où  $S = 0$ . De plus on a autant d'électrons  $+m_l$  que d'électrons  $-m_l$  ( $\forall l$ ) : on a donc là aussi  $M_L = 0$  et donc  $L = 0$ . On a donc toujours pour une sous-couche complète  $S = 0$  et  $L = 0$  (d'où un état  $^1S_0$ , voir plus loin) : les sous-couches complètes ne seront donc jamais considérées car elles donnent toutes le même résultat.

On ne regarde donc que la sous-couche  $2p^2$  : on peut mettre 2 électrons sur 6 spin-orbitales, d'où  $C_6^2=15$  configurations possibles. Chaque terme est caractérisé par les valeurs de  $L$  et de  $S$ . On les note  $^{2S+1}X$  avec une notation spéciale pour  $L$  :

$$\begin{array}{c|cccccc} L = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \hline X = & S & P & D & F & G & \dots \end{array}$$

On a donc la même notation que pour les orbitales, mais en utilisant des lettres majuscules. Un terme  $^3P$  correspond donc à  $S = 1$  et  $L = 1$ . La valeur de  $2S + 1$  s'appelle la multiplicité de spin ; on parle de singulet, doublet, triplet... selon sa valeur. Pour  $^3P$  on dit donc "*triplet P*" et pas "*trois P*".

### 12.4 Dégénérescence des niveaux

L'énergie ne dépend alors que des valeurs de  $L$  et  $S$ . Fixons nous les idées sur une fonction  $2p^2$  et regardons la fonction d'onde  $|2200\rangle$  ( $L = 2$ ,  $M_L = 2$ ,  $S = 0$ ,  $M_S = 0$ ) :  $M_L = 2$  implique que les deux électrons soient sur l'orbitale  $2p_1$ . Ils auront donc forcément des spins opposés, ce qui se vérifie par  $M_S = 0$ . Cette fonction d'onde est donc associée à la configuration  $(2p_1\alpha, 2p_1\beta)$  qui sera relative au terme  $^1D$ .

En général, on veut plus savoir combien il y a de fonctions d'ondes associées à un terme, que quelles sont ces fonctions. À une valeur de  $L$  sont associées  $2L + 1$  valeurs de  $M_L$ , et à une valeur de  $S$  sont associées  $2S + 1$  valeurs pour  $M_S$ . Pour un terme (i.e. un  $L$  et un  $S$  donnés), on a donc  $g = (2L + 1)(2S + 1)$  fonctions  $|LM_LSM_S\rangle$ . Reprenons l'exemple de  $^1D$  ( $S = 0$ ,  $L = 2$ ) : on a une dégénérescence de 5 ; les déterminants associés sont  $|2200\rangle$ ,  $|2100\rangle$ ,  $|2000\rangle$ ,  $|2-100\rangle$  et  $|2-200\rangle$ .

### 12.5 Termes associés à une configuration

Rappelons-nous notre question initiale : pour une configuration électronique donnée (ex :  $np^2$ ), quels sont les termes spectroscopiques associés ? (i.e. les niveaux d'énergie de l'atome, qu'on appellera aussi *couplages* ou *multiplets*).

#### 12.5.1 Cas d'électrons équivalents (i.e. sur la même sous-couche)

On commence toujours par calculer le nombre de cas possibles ; pour  $np^2$  on en a  $C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = 15$ . Pour une orbitale de la sous-couche  $np$ ,  $l = 1$  et  $m_l = -1/0/+1$ . On fait donc la liste des micro-états possibles en utilisant le principe des cases quantiques et  $\uparrow/\downarrow$  pour symboliser les électrons. Pour chaque micro-état, on somme pour trouver  $M_L$  et  $M_S$ . Cette méthode s'appelle *méthode des diagrammes de Slater*.

| $m_l = -1$           | $m_l = 0$            | $m_l = +1$           | $M_L$ | $M_S$ |
|----------------------|----------------------|----------------------|-------|-------|
| $\uparrow\downarrow$ |                      |                      | -2    | 0     |
| $\uparrow$           | $\uparrow$           |                      | -1    | +1    |
| $\uparrow$           |                      | $\uparrow$           | 0     | +1    |
| $\uparrow$           | $\downarrow$         |                      | -1    | 0     |
| $\uparrow$           |                      | $\downarrow$         | 0     | 0     |
| $\downarrow$         | $\uparrow$           |                      | -1    | 0     |
| $\downarrow$         |                      | $\uparrow$           | 0     | 0     |
| $\downarrow$         | $\downarrow$         |                      | -1    | -1    |
| $\downarrow$         |                      | $\downarrow$         | 0     | -1    |
|                      | $\downarrow\uparrow$ |                      | 0     | 0     |
|                      | $\uparrow$           | $\uparrow$           | +1    | +1    |
|                      | $\uparrow$           | $\downarrow$         | +1    | 0     |
|                      | $\downarrow$         | $\uparrow$           | +1    | 0     |
|                      | $\downarrow$         | $\downarrow$         | +1    | -1    |
|                      |                      | $\downarrow\uparrow$ | +2    | 0     |

On fait ensuite un tableau en notant combien de fois apparaît chaque couple.

| $M_L$ | -2 | -1       | 0        | 1        | 2        |
|-------|----|----------|----------|----------|----------|
| $M_S$ |    |          |          |          |          |
| 1     |    | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b> |          |
| 0     |    | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>2</b> | <b>1</b> |
| -1    |    | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b> |          |

On a  $\max(M_L) = 2$  qui n'apparaît qu'une fois : cela veut dire qu'on aura un terme  $L = 2$  qui aura une multiplicité de spin  $2S + 1 = 1$  soit  $^1D$ . Il a une dégénérescence de 5 ( $M_L = -2/-1/0/1/2$ ,  $M_S = 0$ ) d'où 5 agencements qui donnent un terme  $^1D$  (ce que nous avons déjà vu). On retire donc de notre bilan des états correspondants à chacun des termes ( $M_L = -2$ ,  $M_S = 0$ ), ( $M_L = -1$ ,  $M_S = 0$ ), ( $M_L = 0$ ,  $M_S = 0$ ), ( $M_L = 1$ ,  $M_S = 0$ ), ( $M_L = 2$ ,  $M_S = 0$ ). On fait un nouveau bilan :

| $M_L$ | -2 | -1       | 0        | 1        | 2 |
|-------|----|----------|----------|----------|---|
| $M_S$ |    |          |          |          |   |
| 1     |    | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b> |   |
| 0     |    | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>1</b> |   |
| -1    |    | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b> |   |

On a maintenant  $\max(M_L)_{\text{nouveau}} = 1$  qui apparaît 3 fois, on a donc un terme  ${}^3P$  de dégénérescence 9 : 9 fonctions selon  $M_L = -1/0/1$  et  $M_S = -1/0/1$ . On retire les fonctions associées, et on fait un nouveau bilan :

| $M_L$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|-------|----|----|---|---|---|
| $M_S$ |    |    |   |   |   |
| 1     |    |    |   |   |   |
| 0     |    |    | 1 |   |   |
| -1    |    |    |   |   |   |

Ce qui correspond à  ${}^1S$ ,  $g = 1$ . On a donc 3 termes spectroscopiques pour une configuration  $np^2$  :  ${}^1D$ ,  ${}^3P$  et  ${}^1S$ .

Il est nécessaire de travailler en même temps sur  $M_L$  et sur  $M_S$  : si on détermine indépendamment les valeurs de  $L$  et de  $S$ , on trouve que  $2p^2$  implique  $L = 0/1/2$  ou  $S = 0/1$ . On obtient donc trop de termes spectraux. C'est normal car alors on a oublié les contraintes sur les moments :  $(L = 2, S = 1)$  par exemple (qui donnerait un terme  ${}^3D$ ) correspond à une configuration où les deux électrons sont parallèles sur une orbitales  $2p_1$  ce qui est interdit par le principe de Pauli. Travailler indépendamment sur  $L$  et  $S$  n'est valable que si les électrons sont indépendants.

*Commentaire* : en faisant appel à l'antisymétrie de la fonction d'onde, on peut montrer que pour 2 électrons dans la même sous-couche, il FAUT que  $L + S$  soit pair. Pour une configuration  $nd^2$  par exemple, on peut avoir  $S = 0/1$  et  $L = 0/1/2/3/4$ . Seuls  $L = 0/2/4$  sont compatibles avec  $S = 0$  et  $L = 1/3$  avec  $S = 1$ . D'où des termes  ${}^1S$ ,  ${}^1D$ ,  ${}^1G$ ,  ${}^3P$  et  ${}^3F$ .

### 12.5.2 Cas d'électrons non équivalents ou indépendants

Dans les cas d'électrons non équivalents ou indépendants, qui correspondent souvent à des états excités, il faut réfléchir avant d'appliquer les règles.

- $2s^13s^1$  : on a pour chaque électron 2 possibilités de spin-orbitales soit 4 configurations, qui donnent toutes  $M_L = 0$ . On aura donc  $L = 0$ . On pourrait croire à un état  ${}^4S$  mais ceci impliquerait  $S=3/2$  et donc 3 électrons dans le système. Les 2 électrons sont en fait soit parallèles, soit anti-parallèles ce qui donne  $S = 0$  ou  $S = 1$ . On aura donc des termes  ${}^1S$  et  ${}^3S$  ;
- $2s^12p^1$  : on a  $C_2^1C_6^1 = 12$  possibilités, et là aussi  $S = 0$  ou  $S = 1$ . On a  $M_L = \pm 1$  d'où  $L = 1$ . On aura donc des termes  ${}^1P$  ( $g = 3$ ) et  ${}^3P$  ( $g = 9$ ).

## 12.6 États spectroscopiques

Quand on prend en compte le couplage spin-orbite, on a une nouvelle levée de dégénérescence, qui nous fait passer des *termes* aux *états*. On note  ${}^{2S+1}X_J$  les états spectroscopiques qui apparaissent suite à cette levée de dégénérescence avec  $|L - S| \leq J \leq L + S$  et  $-J \leq M_J \leq J$ . Pour 1 valeur de  $J$ , il y a donc  $g = 2J + 1$  valeurs de  $M_J$ . Un terme  ${}^3P$  ( $S = 1, L = 1$ ) donne donc naissance à 3 états spectroscopiques  ${}^3P_0$  ( $g = 1$ ),  ${}^3P_1$  ( $g = 3$ ) et  ${}^3P_2$  ( $g = 5$ ) ( $1 + 3 + 5 = 9$ , on retrouve donc bien la dégénérescence d'un terme  ${}^3P$ ). Pour la configuration  $np^2$  qu'on a regardé précédemment, on trouve  ${}^1D_2$ ,  ${}^3P_{0,1,2}$  et  ${}^1S_0$ <sup>22</sup>. On présente Figure 42 les levées de

22. On note souvent les états spectroscopiques précédés d'un  $n$  : quel que soit la valeur de  $n$ , la notation est la même, mais l'énergie diffère. On note donc le  $n$  pour rappeler que les énergies

dégénérescence suite aux perturbations considérées. On voit bien que la levée de dégénérescence due au couplage spin-orbite est nettement inférieure à celle due à la corrélation.

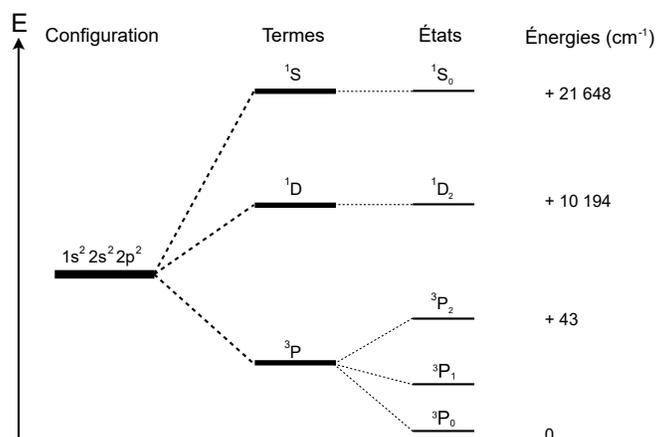


FIGURE 42 – Énergies des termes et états spectroscopiques du carbone (inspiré de “Introduction à la chimie quantique” de Claude Leforestier).

Soit  $q$  électrons avec  $q < 2l + 1$  : les configurations avec  $q$  électrons et  $4l + 2 - q$  électrons auront les mêmes valeurs de  $L$  et de  $S$ , seul  $J$  différera : on appelle ça *l’analogie électrons/trous*. Pour le carbone ( $2p^2$ ), l’état fondamental est  $^3P_0$  ; pour l’oxygène ( $2p^4$ ), ce sera donc par exemple  $^3P_2$  (cf Partie 12.7).

Les états spectroscopiques sont les véritables niveaux d’énergie des atomes et des ions dans les états fondamentaux et excités observés expérimentalement. La règle de Klechkowski n’est en fait qu’un moyen mnémotechnique pour retrouver les niveaux énergétiques des états spectroscopiques. On peut ainsi tracer un diagramme de niveaux d’énergie sans résoudre une quelconque équation de Schrödinger et en utilisant juste les moments angulaires.

## 12.7 Classement énergétique

Il nous faut maintenant classer les états par ordre énergétique. Pour cela des calculs d’intégrales sont nécessaires. On peut cependant facilement trouver l’état fondamental en suivant les règles suivantes (ces règles ont toutes été proposées par Hund) :

- l’état de plus basse énergie est celui de multiplicité de spin maximal (*règle de Hund*). S’il y a plusieurs termes de même valeur de  $S$  maximale, on prend celui de plus grande multiplicité spatiale (pour une configuration  $nd^2$  par exemple il y a des termes  $^3P$  et  $^3F$  : c’est le terme  $^3F$  le fondamental) ;
- si la sous-couche est moins qu’à moitié remplie, l’énergie croît avec  $J$  ; si le nombre d’électrons est inférieur au demi-remplissage (i.e.  $2l + 1$ ), on aura donc une valeur de  $J$  minimale. Si la sous-couche est plus qu’à moitié remplie,

---

dépendent de  $n$ .

on aura une valeur de  $J$  maximale. Si la sous-souche est exactement à moitié remplie, le terme fondamentale correspond à  $L = 0$  et on a alors l'état  $^{2S+1}L_{J=S}$  (comme  $L = 0$ , c'est un état  $S$ ).

Attention, ces règles ne sont valables que pour déterminer l'état fondamental.

## 12.8 Cas du couplage j/j

Regardons une configuration  $np^2$  dans l'hypothèse d'un couplage  $j/j$ . On a pour ces électrons  $l_1 = l_2 = 1$  et  $s_1 = s_2 = 1/2$ . On a  $\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$  qui conduit aux valeurs telles que  $|l_i - s_i| \leq j_i \leq (l_i + s_i)$ . D'où  $j_i = 1/2$  ou  $3/2$ . Et ensuite  $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$  avec  $|j_1 - j_2| \leq J \leq (j_1 + j_2)$ . On trouve donc :

- $j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{1}{2} : J = 0, (1)$
- $j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{3}{2}$  ou  $j_1 = \frac{3}{2}, j_2 = \frac{1}{2} : J = 1, 2$
- $j_1 = \frac{3}{2}, j_2 = \frac{3}{2} : J = 0, (1), 2, (3)$

Les valeurs entre parenthèses ne sont pas acceptables d'après le principe d'exclusion de Pauli. Pour le premier cas on a  $n_1 = n_2 = n, l_1 = l_2 = 1$  et  $j_1 = j_2 = 1/2$ . Si on a  $J = 1$  on aura la possibilité d'une valeur  $M_J = 1$  i.e.  $m_{j_1} = m_{j_2} = 1/2$  i.e. 4 nombres quantiques identiques. Ce qui est interdit par le principe d'exclusion de Pauli.

On peut ensuite faire des diagrammes qui corrént les états selon les couplages L-S et j/j. Et dans le cas du couplage j/j, on note plutôt les états sous la forme  $(j_1, j_2)J$ .

## 12.9 Applications

### 12.9.1 État spectroscopique et configuration électronique

D'après la règle de Klechkowski, le chrome a pour configuration électronique à l'état fondamental  $[Ar] 4s^2 3d^4$ . Expérimentalement, on observe un état fondamental pour le chrome  $^7S_3$ . On a donc  $S = 3$  ce qui veut dire qu'il y a 6 électrons non appariés. On va donc avoir la configuration électronique  $[Ar] 4s^1 3d^5$ . De plus cette configuration est compatible avec  $\max(M_L) = L = 0$  (autant d'électrons  $m_l = -2$  que d'électrons  $m_l = +2$  par exemple). La règle de Klechkowski ne nous donne donc pas la bonne configuration pour le chrome qui est une exception, et c'est la spectroscopie atomique qui nous permet de le dire.

### 12.9.2 Le doublet du sodium

La configuration électronique du sodium est  $3s^1$  et implique un état  $^2S_{1/2}$  ( $S = \frac{1}{2}$  et  $L = 0$ ) ; le premier état excité est  $3p^1$  et implique deux états  $^2P_{1/2}$  et  $^2P_{3/2}$  ( $S = \frac{1}{2}$  et  $L = 1$ ). Après excitation, il y a donc 2 valeurs énergétiques proches pour le retour à l'état fondamental. Si on calcule la différence entre ces différences énergétiques, ce qui revient à calculer la différence énergétique entre l'état  $^2P_{1/2}$  et l'état  $^2P_{3/2}$ , on trouve  $\frac{3hcA}{2}$  (avec ce qu'on a vu Partie 12.1.2). C'est cette différence d'énergie qui est la cause du doublet du sodium à  $589,0nm$  et  $589,6nm$ . On voit d'ailleurs que ce n'est pas spécifique au sodium, et tous les alcalins ont donc un doublet dans leur spectre d'émission. La différence énergétique entre les états  $^2P_{1/2}$  et  $^2P_{3/2}$  vaut respectivement pour les atomes Li, Na, K, Rb, Cs :  $0,3 cm^{-1}$  ;  $17,2 cm^{-1}$  ;  $57,7 cm^{-1}$  ;  $237,6 cm^{-1}$  ;  $554,1 cm^{-1}$ .

## 13 Bonus - Spectroscopie moléculaire

Pour les molécules,  $\hat{L}^2$  ne commute plus avec  $\hat{\mathcal{H}}_{el}$  et donc  $L$  n'est plus un bon nombre quantique. On peut caractériser chaque niveau d'énergie par la représentation irréductible (RI)  $\Gamma_i$  à laquelle il appartient et par sa dégénérescence de spin. On obtient un terme  $^{2S+1}\Gamma_i$  avec  $g = g_{\Gamma_i} \times (2S + 1)$ . On rappelle que pour une RI A ou B,  $g_A = g_B = 1$ ; pour une RI E,  $g_E = 2$ ; pour une RI T,  $g_T = 3$ .

### 13.1 Molécules à couches fermées

La symétrie d'une configuration électronique se trouve en faisant le produit direct des symétries des électrons (i.e. des orbitales qui contiennent les électrons). Pour une molécule à couche fermée, la configuration fondamentale engendre toujours l'unique terme  $^1\Gamma_1$  où  $\Gamma_1$  est la RI totalement symétrique (cf Partie 6.7). C'est le même type de résultat que celui qui disait dans le cas de l'atome que pour une sous-couche pleine on trouve un état  $^1S_0$ . Pour le méthane  $\text{CH}_4$  on a donc un état  $^1A_1$  et pour  $\text{H}_2$  (qui appartient au groupe  $D_{\infty h}$ ) on a  $^1\Sigma_g^+$ .

### 13.2 Molécules à couches ouvertes

On a besoin du diagramme d'orbitales moléculaires pour pouvoir écrire la configuration électronique et donc trouver la symétrie de cette configuration. Il faut toujours commencer par penser à utiliser l'analogie électron/trou si besoin est.

- Pour  $\text{CH}_4^+$  on a une configuration  $(1a_1)^2(2a_1)^2(1t_2)^5$ . On regarde donc le cas de  $(1t_2)^1$ . Il y a 6 possibilités car T est 3 fois dégénérée et l'électron peut être  $\alpha$  ou  $\beta$ . On a un état  $^2T_2$ .
- Pour  $\text{CH}_4^*$  on a une configuration  $(1a_1)^2(2a_1)^2(1t_2)^5(2t_2)^1$  qui équivaut à  $(1t_2)^1(2t_2)^1$ . Les deux électrons sont indépendants; chaque terme implique un terme  $^2T$ , on a donc  $^2T_2 \otimes ^2T_2$ , produit direct entre deux  $^2T$  qu'on peut réduire :  $T_2 \otimes T_2 = A_1 \oplus E \oplus T_1 \oplus T_2$ . De plus on a  $S = 0/1$ . On a donc une configuration :  $^2T_2 \otimes ^2T_2 = ^1A_1 \oplus ^3A_1 \oplus ^1E \oplus ^3E \oplus ^1T_1 \oplus ^3T_1 \oplus ^1T_2 \oplus ^3T_2$  (avec  $g=36$ ).

### 13.3 Molécules linéaires

Pour les molécules linéaires on caractérise chaque terme électronique par une RI désignées par  $|M_L|$ .

$$\begin{array}{c|cccc} |M_L| = & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline \Gamma & \Sigma^{+/-} & \Pi & \Delta & \Phi & \dots \end{array}$$

À toute RI dégénérée (i.e.  $M_L \neq 0$ ) sont associées 2 composantes ( $+|M_L|$  et  $-|M_L|$ ). Un terme sera caractérisé par les deux nombres quantiques  $|M_L|$  et  $S$ . Prenons l'exemple de  $\text{O}_2$  dont nous avons établi le diagramme d'OM Partie 7.11; on ne regarde que  $(1\pi_g)^2$  car les autres niveaux sont remplis. On procède comme pour les atomes : on a  $C_4^2 = 6$  déterminants. On écrit ces 6 possibilités de placer les électrons sur  $1\pi_{g+1}$  et  $1\pi_{g-1}$ . On a alors  $\max(M_L) = 2$  qui est associé à  $M_S=0$ . Les couples  $(M_L = 2, M_S = 0)$  et  $(M_L = -2, M_S = 0)$  correspondent donc à un terme caractérisé par  $|M_L| = 2$  et  $S = 0$ . Les deux OM sont symétriques par rapport à l'inversion (i.e. notées  $g$ ) donc le produit le sera aussi : le premier terme est donc  $^1\Delta_g$ . Il reste alors 4 déterminants avec  $M_L = 0$  et  $M_S = -1/0/0/1$ . Un des couples  $(M_L = 0, M_S = 0)$

correspond à un terme  ${}^1\Sigma_g^{+/-}$ . Les trois couples restant donnent lieu à un terme  ${}^3\Sigma_g^{+/-}$ . Il faut ensuite déterminer la parité vis-à-vis d'une réflexion  $\sigma_v$  de ces termes pour savoir s'ils sont + ou -. On peut aussi dire que la fonction d'onde devant être antisymétrique, si on a un triplet de spin on aura un état - par exemple. Au final, on trouve  ${}^1\Delta_g \oplus {}^3\Sigma_g^- \oplus {}^1\Sigma_g^+$ . Pour ce qui est du classement énergétique, la règle de Hund précise que l'énergie diminue avec la multiplicité de spin, et à même multiplicité de spin, l'énergie diminue quand  $|M_L|$  augmente. D'où  ${}^3\Sigma_g^- < {}^1\Delta_g < {}^1\Sigma_g^+$ .

## 14 Exercices

Les exercices qui suivent sont à savoir faire ou au moins à bien comprendre. Certains exercices sont très calculatoires, mais il faut savoir maîtriser ces calculs puisqu'ils peuvent constituer des débuts de problèmes.

### 14.1 Atomes et atomistique

#### 14.1.1 Trajectoire d'un avion et d'un électron

1. Un avion de 40m de long et pesant 100t est en vol. On mesure sa vitesse à 900 +/- 10km/h. En appliquant le principe d'incertitude d'Heisenberg, quelle sera la plus petite valeur possible de l'incertitude sur sa position ? Est-ce satisfaisant comme valeur ?
2. On considère un électron ( $m_e \approx 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ) se déplaçant à  $10^5 \text{ m/s}$ . Si on connaît sa vitesse à 1% près, quelle sera la plus petite valeur possible de l'incertitude sur sa position ? Commentez, sachant que l'ordre de grandeur de la taille d'un nuage électronique est de 100pm.

On assimilera écart-type et incertitude dans la formule de Heisenberg :  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ .

#### 14.1.2 Spectres et énergie d'ionisation

1. Dans le spectre d'émission de l'hydrogène, on trouve une série (dite de Balmer) dont les longueurs d'onde sont 656,46 nm, 486,27 nm, 434,17 nm et 410,29 nm. Quelle est la longueur d'onde de la raie suivante ?
2. On considère l'ion  $\text{C}^{5+}$ . Quelles sont les longueurs d'onde extrêmes de la série pour laquelle l'état final de l'électron est 3s.
3. Quel est l'énergie d'ionisation de  $\text{C}^{5+}$  lorsqu'il est dans son état fondamental ?

#### 14.1.3 Configuration électronique et orbitale

1. Donnez la configuration électronique fondamentale du platine ( $Z = 78$ ) qui respecte la règle de Klechkowski. Sachant que les niveaux des OA 6s et 5d sont très proches en énergie, proposer deux autres configurations électroniques possibles pour cet atome dans son état fondamental.
2. Le cuivre ( $Z = 29$ ) a une orbitale dont l'expression mathématique en coordonnées sphériques est donnée ci-dessous. Dessiner cette orbitale dans le plan, en prenant soin de libeller les axes, et nommer là.

$$\phi = -\frac{1}{81\sqrt{2}\pi} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{7/2} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} \cdot 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\varphi)$$

#### 14.1.4 Modèle de Slater

On se place dans le cadre du modèle de Slater défini Partie 4.6. Calculer :

1. les énergies de première et de seconde ionisation du carbone ;
2. l'énergie d'extraction  $E_{extr}(1s)$  d'un électron 1s du carbone ;
3. les rayons des atomes et ions suivants : He, F,  $\text{F}^-$ , Mg,  $\text{Mg}^{2+}$  (on admet que le rayon d'un atome peut être assimilé au rayon de l'orbitale atomique la plus externe).

### 14.1.5 Classification périodique

1. Dessiner schématiquement (i.e. par bloc) la classification périodique dans son format étendu, en incluant le bloc g. Préciser la taille de chaque bloc.
2. L'un des derniers éléments synthétisés est un gaz noble. Il est sur la 7ème période. Quel est son numéro atomique ?

## 14.2 Théorie des groupes

### 14.2.1 Opérations de symétrie, classes et groupes de symétrie

1. Faire la liste des opérations de symétrie pour les molécules suivantes, dans leurs géométries d'équilibre :  $\text{NH}_3$ ,  $\text{CH}_4$ ,  $\text{SF}_6$ ,  $\text{N}_2$ .
2. A quels groupes ponctuels de symétrie appartiennent les molécules suivantes dans leurs géométries d'équilibre ?
  - $\text{CH}_4$ ,  $\text{CH}_3\text{D}$ ,  $\text{CH}_2\text{D}_2$  ;
  - $\text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_2$  (configurations Z et E) ;
  - $\text{C}_2\text{H}_6$  (conformations : éclipsée, décalée, intermédiaire) ;
  - Cyclohexane en conformation chaise.

### 14.2.2 Représentations d'un groupe ponctuel

1. Déterminer la représentation matricielle du groupe ponctuel de symétrie de  $\text{NH}_3$  (dans sa géométrie d'équilibre) dans une *base orthonormée de  $R^3$* . Où doit-on placer l'origine de la base de représentation ?
2. Déterminer les représentations matricielles des opérateurs de symétrie de  $\text{NH}_3$  (dans sa géométrie d'équilibre) dans la base des *orbitales 1s des 3 atomes d'hydrogène*. Pourrait-on réduire cette base en ne prenant qu'une ou deux des orbitales ? Exprimer ces matrices dans la base  $\{1s_1 + 1s_2 + 1s_3, 2 \cdot 1s_1 - 1s_2 - 1s_3, 2 \cdot 1s_2 - 1s_3 - 1s_1\}$ .
3. Déterminer les représentations matricielles des opérateurs de symétrie de  $\text{NH}_3$  (dans sa géométrie d'équilibre) dans la base des *orbitales  $(p_x, p_y, p_z)$  de l'atome d'azote*. Comment faire pour en déduire la représentation sur la base des orbitales  $(p_1, p_0, p_{-1})$  de l'atome d'azote ?

### 14.2.3 Réduction d'une représentation

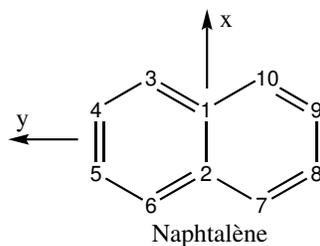
Réduire en représentations irréductibles les représentations des groupes de symétrie des molécules suivantes dans les bases données :

1. Pour la molécule  $\text{NH}_3$  : base des orbitales 1s des hydrogènes et base des orbitales  $(2p_x, 2p_y, 2p_z)$  de l'atome d'azote.
2. Pour un complexe octaédrique d'un métal de transition : base constituée des 5 orbitales *d* de l'atome métallique.

En déduire ensuite les orbitales moléculaires de symétrie de  $\text{NH}_3$  par exemple dans la bases des orbitales 1s des hydrogènes.

### 14.2.4 Application à la méthode de Hückel : le naphthalène

On s'intéresse ici au système  $\pi$  du naphthalène ( $\text{C}_{10}\text{H}_8$ ). Le but est de déterminer partiellement le diagramme d'orbitales moléculaires.



1. Écrire le déterminant séculaire du système dans la base constituée des orbitales  $2p_z$  de chacun des atomes de carbone.
2. Trouver le groupe de symétrie de la molécule de naphtalène. Déterminer les orbitales bases des RI de la molécules construites à partir des orbitales  $2p_z$  de chaque atome de carbone.
3. Écrire le déterminant séculaire du système dans la base des orbitales de symétrie. Quel est l'intérêt du changement de base ? Déterminer les énergies des OM du naphtalène.
4. On donne les expressions des OM sous forme de CLAO, chaque ligne correspondant à la décomposition d'une orbitale moléculaire sur les différentes OA  $2p_z$ . Attribuer à chaque orbitale son énergie et tracer le diagramme d'OM du naphtalène.

| atomes | 1      | 2     | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| OM1    | 0,461  | 0,461 | 0,301  | 0,231  | 0,231  | 0,301  | 0,301  | 0,231  | 0,231  | 0,301  |
| OM2    | 0,000  | 0,000 | 0,263  | 0,425  | 0,425  | 0,263  | -0,263 | -0,425 | -0,425 | -0,263 |
| OM3    | -0,347 | 0,347 | -0,400 | -0,174 | -0,174 | 0,400  | 0,400  | 0,174  | -0,174 | -0,400 |
| OM4    | 0,408  | 0,408 | 0,000  | -0,408 | -0,408 | 0,000  | 0,000  | -0,408 | -0,408 | 0,000  |
| OM5    | 0,000  | 0,000 | -0,425 | -0,263 | 0,263  | 0,425  | -0,425 | -0,263 | 0,263  | 0,425  |
| OM6    | 0,000  | 0,000 | -0,425 | 0,263  | 0,263  | -0,425 | 0,425  | -0,263 | -0,263 | 0,425  |
| OM7    | -0,408 | 0,408 | 0,000  | 0,408  | -0,408 | 0,000  | 0,000  | -0,408 | 0,408  | 0,000  |
| OM8    | 0,347  | 0,347 | -0,400 | 0,174  | 0,174  | -0,400 | -0,400 | 0,174  | 0,174  | -0,400 |
| OM9    | 0,000  | 0,000 | 0,263  | -0,425 | 0,425  | -0,263 | 0,263  | -0,425 | 0,425  | -0,263 |
| OM10   | -0,461 | 0,461 | 0,301  | -0,231 | 0,231  | -0,301 | -0,301 | 0,231  | -0,231 | 0,301  |

### 14.3 Diagrammes d'OM

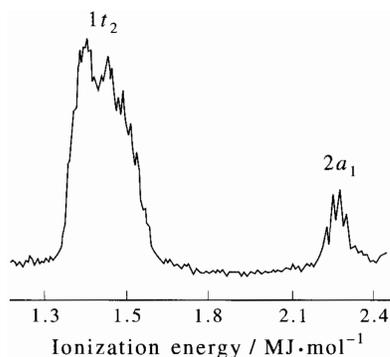
#### 14.3.1 Diagramme de $\text{Cl}_2$

1. Tracer, en le justifiant, le diagramme d'OM de la molécule de dichlore et donner sa configuration électronique fondamentale.
2.  $\text{F}_2$ ,  $\text{Cl}_2$ ,  $\text{Br}_2$ ,  $\text{I}_2$  sont à l'état gazeux respectivement jaune, jaune-vert, rouge-brun, violet. Justifier cette évolution (on ne considérera pas le cas du dibrome qui est une exception ici).

#### 14.3.2 Méthode des fragments : le méthane

On cherche l'allure du diagramme d'OM du méthane sous la forme de combinaisons linéaires des orbitales de valence des atomes constitutifs. On envisage de construire les OM par combinaisons linéaires d'orbitales de C et de  $\text{H}_4$  qui ont des recouvrements non nuls. Tout d'abord on va étudier le fragment  $\text{H}_4$  tétraédrique, puis le fragment C, et finalement on considèrera les interactions entre les deux. On donne en unités atomiques les énergies des orbitales atomiques :  $2s_C = -0,706$  ;  $2p_C = -0,433$  ;  $1s_H = -0,5$ .

1. Quelle est la base à considérer ?
2. Justifier que l'on peut d'emblée, pour trouver les orbitales de symétrie, séparer les orbitales du carbone et les orbitales des hydrogènes.
3. Fragment  $H_4$  : trouver le groupe de symétrie de  $H_4$  tétraédrique. Quels sont les caractères de la représentation de ce groupe dans la base des orbitales  $1s_H$  ? Décomposer la représentation en somme de représentations irréductibles ; donner les orbitales de symétrie construites à partir des orbitales  $1s_H$ . Pour la RI  $T_2$ , on cherchera des bases ayant les mêmes propriétés de symétrie que  $x$ ,  $y$  et  $z$  (c'est-à-dire ayant les mêmes caractères).
4. Fragment C : décomposer en représentations irréductibles les orbitales  $2s$  et  $2p$  du carbone dans le groupe de  $CH_4$ , puis donner les bases pour ces représentations irréductibles.
5. Déterminer les orbitales couplées via l'hamiltonien moléculaire. En se limitant à des interactions à deux niveaux, tracer qualitativement le diagramme d'orbitales moléculaires du méthane.
6. Donner la configuration électronique du méthane dans son état fondamental. Interpréter le spectre de photoélectrons du méthane suivant :



### 14.3.3 Diagrammes d'OM de $AH_2$ et diagramme de Walsh (© X. Assfeld & C. Millot)

On considère une molécule de type  $AH_2$  où A est un élément de la deuxième période du tableau périodique.

1. Construire les OM de cette molécule pour la configuration angulaire et pour la configuration linéaire. Afin de faire une comparaison directe des deux diagrammes d'OM, on choisira l'axe  $z$  selon l'axe  $C_2$  de la configuration coudée et perpendiculaire à l'axe H-A-H pour la configuration linéaire.
2. Corréler deux à deux les OM des deux conformères en précisant l'effet du changement de géométrie sur l'énergie de chaque OM.
3. En appliquant la règle de Walsh, prédire la géométrie de  $BeH_2$ ,  $CH_2$ ,  $NH_2^+$  et  $OH_2$ .

### 14.3.4 Diagramme d'OM de $CO_2$

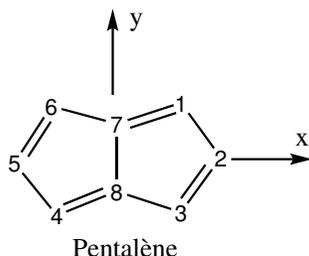
1. Construire les OM du fragment  $O \cdots O$  (molécule  $O_2$  étirée).
2. Donner la forme approximative des OM de  $CO_2$  par interaction entre les OS de  $O \cdots O$  et les OA de symétries convenables du carbone. Préciser leurs symétries.
3. Construire le diagramme d'orbitales moléculaires du dioxyde de carbone.

## 14.4 Méthode de Hückel

### 14.4.1 Formules de Coulson

Déterminer la longueur de chaîne minimum d'un polyène linéaire pour que ce dernier absorbe dans le visible. On prendra  $\beta = -250 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

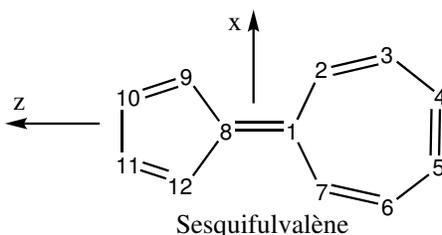
### 14.4.2 Le pentalène (© X. Assfeld)



1. Quel est le groupe de symétrie du pentalène ?
2. Trouver les OM  $\pi$  et leurs énergies dans le cadre de la méthode de Hückel (on indique qu'une orbitale moléculaire  $\pi$  a l'énergie  $\alpha - 1,8136\beta$ ).
3. Déterminer la population électronique et la charge nette de type  $\pi$  de chaque carbone.
4. Calculer l'énergie de résonance.
5. Calculer les indices de liaison  $\pi$ . Déterminer l'indice de valence libre de chaque carbone.

### 14.4.3 Le sesquifulvalène (© X. Assfeld & C. Millot)

La molécule de sesquifulvalène possède un fort moment dipolaire orienté du cycle à 5 atomes de carbone vers celui à 7. Nous expliquerons l'existence de ce moment dipolaire en calculant les charges électriques  $\pi$  des deux cycles.



Le tableau ci-dessous donne certains coefficients des OA dans les OM, le type de symétrie (A ou B) des OM et l'énergie de certaines OM ( $\varepsilon = \alpha + m\beta$ ) calculées par la méthode de Hückel simple. Les OM sont sur les colonnes, les OA sont en ligne.

1. Retrouver les symétries manquantes.
2. Retrouver les coefficients manquants.
3. Retrouver les énergies manquantes.
4. Déterminer l'énergie de formation du système  $\pi$ .
5. Déterminer l'énergie de résonance de cette molécule.

- Calculer les indices de liaison  $\pi$  ( $P_{ij}$ ) entre les atomes  $i$  et  $j$ , ainsi que les longueurs de liaison ( $R_{ij}$ ) en appliquant la formule  $R_{ij} = 1.517 - 0.18P_{ij}$  Å.
- Calculer toutes les charges atomiques  $\pi$ . Calculer la charge nette de chaque cycle.

|     | 1     | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     | 12     |
|-----|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| m   | 2,284 | 1,893  | 1,354  | ??     | 0,618  | 0,570  | -0,445 | -0,473 | -1,465 | -1,618 | -1,802 | ??     |
| Sym | ??    | B      | B      | A      | A      | B      | ??     | B      | B      | A      | A      | B      |
| 1   | 0,449 | 0,149  | -0,459 | 0,000  | 0,000  | 0,064  | 0,000  | -0,490 | -0,173 | 0,000  | 0,000  | 0,540  |
| 2   | 0,277 | 0,248  | -0,226 | -0,418 | 0,000  | 0,284  | -0,521 | 0,092  | 0,333  | 0,000  | 0,232  | -0,334 |
| 5   | 0,144 | 0,359  | 0,433  | 0,232  | 0,000  | -0,228 | -0,418 | -0,303 | 0,127  | 0,000  | -0,521 | -0,057 |
| 6   | 0,184 | ??     | 0,153  | 0,521  | 0,000  | 0,098  | -0,232 | 0,446  | -0,314 | 0,000  | 0,418  | 0,181  |
| 8   | 0,470 | -0,214 | -0,169 | 0,000  | 0,000  | -0,531 | 0,000  | 0,048  | -0,411 | 0,000  | 0,000  | -0,501 |
| 10  | 0,244 | -0,310 | 0,325  | 0,000  | -0,372 | 0,426  | 0,000  | -0,158 | -0,157 | -0,602 | 0,000  | -0,086 |
| 12  | 0,313 | -0,277 | 0,115  | 0,000  | ??     | -0,183 | 0,000  | 0,233  | 0,388  | ??     | 0,000  | 0,272  |

## 14.5 Bonus - Spectroscopie

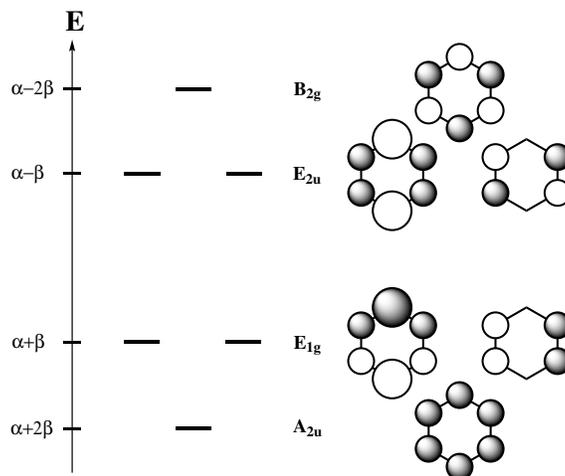
### 14.5.1 L'atome d'hélium

On considère les configurations électroniques  $1s^2$ ,  $1s^1 2s^1$ ,  $1s^1 2p^1$  de l'atome d'hélium.

- Déterminer tous les termes spectroscopiques engendrés par ces trois configurations. Donner les dégénérescences associées.
- Déterminer tous les états spectroscopiques engendrés par les termes spectroscopiques de l'hélium. Donner la dégénérescence associée à ces états.
- Classer en énergie les différents termes et états, en justifiant la réponse. Sur un même diagramme, représenter les trois configurations électroniques, et les termes et états spectroscopiques associés.

### 14.5.2 Le benzène

On donne les OM du benzène, avec leurs symétries et leurs énergies calculées par la méthode de Hückel :



- On donne  $\beta = -294 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Quelle est la longueur d'onde d'absorption attendue pour la transition électronique la moins énergétique du benzène ?
- Le spectre U.V.-visible du benzène présente une bande d'absorption avec trois maxima pour :  $\lambda = 180 \text{ nm}$  ( $\varepsilon = 40000$ ),  $\lambda = 203,5 \text{ nm}$  ( $\varepsilon = 7400$ ) et  $\lambda = 254 \text{ nm}$  ( $\varepsilon = 204$ ). Commenter.

## 15 Bibliographie

Pour préparer ce cours, je me suis servi de (par ordre de difficulté croissante) :

- “Chimie théorique - Applications à la spectroscopie” de Roland Lissillour chez Dunod : bien pour une première approche très simple. C’est celui que je recommande pour appréhender les notions générales si vous vous sentez perdu(e)s. L’ouvrage est parfois lacunaire, ne vous arrêtez donc pas trop longtemps sur cet ouvrage et lisez plus en détails l’un des ouvrages suivants.
- “Manuel de chimie théorique” de Patrick Chaquin : beaucoup de sujets abordés, à chaque fois en assez peu de pages : il va donc directement à l’essentiel. Certain(e)s apprécieront le peu de détails, d’autres pas.
- “Les orbitales moléculaires en chimie” de Yves Jean & François Volatron chez Ediscience International, ou sa version plus récente “Structure électronique des molécules” tomes 1 et 2 chez Dunod : je me suis beaucoup servi de ce livre pour tout ce qui est construction d’OM et je le recommande fortement.
- “Introduction à la chimie quantique” de Philippe Hiberty & Nguyễn Trong Anh aux Éditions de l’École Polytechnique : livre bien fait et bien écrit, plusieurs exemples de ce cours en sont issus.
- “Chimie physique” de Peter Atkins chez De Boeck (en français) ou Oxford University Press (en anglais) : la théorie des groupes y est faite en 20 pages et est axée sur ses applications, et la construction d’OM y est clair.
- “Éléments de chimie quantique à l’usage des chimistes” de Jean-Louis Rivail chez Interéditions du CNRS : un livre complet et bien fait sur la chimie théorique et la théorie des groupes.
- “Introduction à la chimie quantique” de Claude Leforestier chez Dunod : cet ouvrage est très complet et très mathématique ; il est d’un niveau plus élevé que les précédents (donc plus intéressant pour certain(e)s) et traite de chimie théorique avancée, de spectroscopie et de théorie des groupes.

Pour des ouvrages spécifiques à la théorie des groupes, je vous recommande :

- “Notions de théorie des groupes appliquée à la chimie” : c’est un polycopié de télé-enseignement sur la théorie des groupes fait par l’Université de Provence : il fait 100 pages dont beaucoup que vous pourrez sauter, et est excellent. L’approche y est claire, rigoureuse, pédagogique et surtout complète : une autre solution que le Lissillour si vous êtes perdus et si vous avez un peu plus de temps. Je le recommande vraiment.
- “La théorie des groupes en chimie” de François Volatron et Patrick Chaquin chez De Boeck : un livre récent sur le sujet. Je ne l’ai pas lu en détails, mais il semble être clair et bien structuré et je le recommande.
- “Chimie et théorie des groupes” de Paul H. Walton chez De Boeck : un ouvrage très pédagogique qui guide le lecteur pas à pas avec beaucoup d’exercices (mais dont j’apprécie peu le format à titre personnel).
- “Chemical applications of group theory” de F. Albert Cotton chez Wiley-Interscience (ou “Applications de la théorie des groupes à la chimie” chez Dunod Université) : un livre dédié exclusivement au sujet, donc forcément complet, avec par endroit beaucoup de détails sur lesquels on fera l’impasse.
- “Symétrie et structure : théorie des groupes en chimie” de Sidney Kettle chez Masson : idem que pour le Cotton, mais je préfère le plan du Cotton.

## 16 Tables de caractères

| $C_{2v}$ | E  | $C_2(z)$ | $\sigma_v(xz)$ | $\sigma'_v(yz)$ |            |                 |
|----------|----|----------|----------------|-----------------|------------|-----------------|
| $A_1$    | +1 | +1       | +1             | +1              | $T_z$      | $x^2; y^2; z^2$ |
| $A_2$    | +1 | +1       | -1             | -1              | $R_z$      | $xy$            |
| $B_1$    | +1 | -1       | +1             | -1              | $T_x; R_y$ | $xz$            |
| $B_2$    | +1 | -1       | -1             | +1              | $T_y; R_x$ | $yz$            |

| $C_{3v}$ | E  | $2C_3(z)$ | $3\sigma_v$ |                          |                             |
|----------|----|-----------|-------------|--------------------------|-----------------------------|
| $A_1$    | +1 | +1        | +1          | $T_z$                    | $x^2 + y^2; z^2$            |
| $A_2$    | +1 | +1        | -1          | $R_z$                    |                             |
| E        | +2 | -1        | 0           | $(T_x, T_y); (R_x, R_y)$ | $(x^2 - y^2, xy); (xz, yz)$ |

| $D_{2h}$ | E  | $C_2(z)$ | $C_2(y)$ | $C_2(x)$ | i  | $\sigma(xy)$ | $\sigma(xz)$ | $\sigma(yz)$ |       |                 |
|----------|----|----------|----------|----------|----|--------------|--------------|--------------|-------|-----------------|
| $A_g$    | +1 | +1       | +1       | +1       | +1 | +1           | +1           | +1           |       | $x^2; y^2; z^2$ |
| $B_{1g}$ | +1 | +1       | -1       | -1       | +1 | +1           | -1           | -1           | $R_z$ | $xy$            |
| $B_{2g}$ | +1 | -1       | +1       | -1       | +1 | -1           | +1           | -1           | $R_y$ | $xz$            |
| $B_{3g}$ | +1 | -1       | -1       | +1       | +1 | -1           | -1           | +1           | $R_x$ | $yz$            |
| $A_u$    | +1 | +1       | +1       | +1       | -1 | -1           | -1           | -1           |       |                 |
| $B_{1u}$ | +1 | +1       | -1       | -1       | -1 | -1           | +1           | +1           | $T_z$ |                 |
| $B_{2u}$ | +1 | -1       | +1       | -1       | -1 | +1           | -1           | +1           | $T_y$ |                 |
| $B_{3u}$ | +1 | -1       | -1       | +1       | -1 | +1           | +1           | -1           | $T_x$ |                 |

| $D_{6h}$ | E  | $2C_6$ | $2C_3$ | $C_2$ | $3C'_2$ | $3C''_2$ | i  | $2S_3$ | $2S_6$ | $\sigma_h$ | $3\sigma_d$ | $3\sigma_v$ |            |                  |
|----------|----|--------|--------|-------|---------|----------|----|--------|--------|------------|-------------|-------------|------------|------------------|
| $A_{1g}$ | +1 | +1     | +1     | +1    | +1      | +1       | +1 | +1     | +1     | +1         | +1          | +1          |            | $x^2 + y^2; z^2$ |
| $A_{2g}$ | +1 | +1     | +1     | +1    | -1      | -1       | +1 | +1     | +1     | +1         | -1          | -1          | $R_z$      |                  |
| $B_{1g}$ | +1 | -1     | +1     | -1    | +1      | -1       | +1 | -1     | +1     | -1         | +1          | -1          |            |                  |
| $B_{2g}$ | +1 | -1     | +1     | -1    | -1      | +1       | +1 | -1     | +1     | -1         | -1          | +1          |            |                  |
| $E_{1g}$ | +2 | +1     | -1     | -2    | 0       | 0        | +2 | +1     | -1     | -2         | 0           | 0           | $R_x; R_y$ | $xz; yz$         |
| $E_{2g}$ | +2 | -1     | -1     | +2    | 0       | 0        | +2 | -1     | -1     | +2         | 0           | 0           |            | $x^2 - y^2; xy$  |
| $A_{1u}$ | +1 | +1     | +1     | +1    | +1      | +1       | -1 | -1     | -1     | -1         | -1          | -1          |            |                  |
| $A_{2u}$ | +1 | +1     | +1     | +1    | -1      | -1       | -1 | -1     | -1     | -1         | +1          | +1          | $T_z$      |                  |
| $B_{1u}$ | +1 | -1     | +1     | -1    | +1      | -1       | -1 | +1     | -1     | +1         | -1          | +1          |            |                  |
| $B_{2u}$ | +1 | -1     | +1     | -1    | -1      | +1       | -1 | +1     | -1     | +1         | +1          | -1          |            |                  |
| $E_{1u}$ | +2 | +1     | -1     | -2    | 0       | 0        | -2 | -1     | +1     | +2         | 0           | 0           | $T_x; T_y$ |                  |
| $E_{2u}$ | +2 | -1     | -1     | +2    | 0       | 0        | -2 | +1     | +1     | -2         | 0           | 0           |            |                  |

| $T_d$ | E  | $8C_3$ | $3C_2$ | $6S_4$ | $6\sigma_d$ |                 |                               |
|-------|----|--------|--------|--------|-------------|-----------------|-------------------------------|
| $A_1$ | +1 | +1     | +1     | +1     | +1          |                 | $x^2 + y^2 + z^2$             |
| $A_2$ | +1 | +1     | +1     | -1     | -1          |                 |                               |
| E     | +2 | -1     | +2     | 0      | 0           |                 | $2z^2 - x^2 - y^2; x^2 - y^2$ |
| $T_1$ | +3 | 0      | -1     | +1     | -1          | $R_x; R_y; R_z$ |                               |
| $T_2$ | +3 | 0      | -1     | -1     | +1          | $T_x; T_y; T_z$ | $xy; xz; yz$                  |

| $O_h$    | E  | $8C_3$ | $6C_2$ | $6C_4$ | $3C_2$ | i  | $6S_4$ | $8S_6$ | $3\sigma_h$ | $6\sigma_d$ |                 |                               |
|----------|----|--------|--------|--------|--------|----|--------|--------|-------------|-------------|-----------------|-------------------------------|
| $A_{1g}$ | +1 | +1     | +1     | +1     | +1     | +1 | +1     | +1     | +1          | +1          |                 | $x^2 + y^2 + z^2$             |
| $A_{2g}$ | +1 | +1     | -1     | -1     | +1     | +1 | -1     | +1     | +1          | -1          |                 |                               |
| $E_g$    | +2 | -1     | 0      | 0      | +2     | +2 | 0      | -1     | +2          | 0           |                 | $2z^2 - x^2 - y^2; x^2 - y^2$ |
| $T_{1g}$ | +3 | 0      | -1     | +1     | -1     | +3 | +1     | 0      | -1          | -1          | $R_x; R_y; R_z$ |                               |
| $T_{2g}$ | +3 | 0      | +1     | -1     | -1     | +3 | -1     | 0      | -1          | +1          |                 | $xy; xz; yz$                  |
| $A_{1u}$ | +1 | +1     | +1     | +1     | +1     | -1 | -1     | -1     | -1          | -1          |                 |                               |
| $A_{2u}$ | +1 | +1     | -1     | -1     | +1     | -1 | +1     | -1     | -1          | +1          |                 |                               |
| $E_u$    | +2 | -1     | 0      | 0      | +2     | -2 | 0      | +1     | -2          | 0           |                 |                               |
| $T_{1u}$ | +3 | 0      | -1     | +1     | -1     | -3 | -1     | 0      | +1          | +1          | $T_x; T_y; T_z$ |                               |
| $T_{2u}$ | +3 | 0      | +1     | -1     | -1     | -3 | +1     | 0      | +1          | -1          |                 |                               |

## 17 Corrections des exercices

### 17.1 Atomes et atomistique

#### 17.1.1 Trajectoire d'un avion et d'un électron

1. Un avion de 40m de long et pesant 100t est en vol. On mesure sa vitesse à 900 +/- 10km/h. En appliquant le principe d'incertitude d'Heisenberg, quelle sera la plus petite valeur possible de l'incertitude sur sa position ? Est-ce satisfaisant comme valeur ?

On commence par convertir la vitesse : 900 km/h = 250 m/s et 10 km/h = 2,78 m/s. L'incertitude sur la quantité de mouvement vaut  $\Delta p = m\Delta v = 2,78 * 10^5$  kg.m/s. La relation d'Heisenberg s'écrit  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$  d'où  $\Delta x \geq \hbar/(4\pi\Delta p)$ .

$$\Delta x \geq 0,527 * 10^{-34} J \cdot s \cdot \frac{1}{2,78 * 10^5 kg \cdot m/s}$$

$$\text{i.e. : } \Delta x \geq 0,19 * 10^{-39} m$$

On peut donc connaître la position de l'avion avec toute la précision voulue.

2. On considère un électron ( $m_e \approx 9,11 * 10^{-31} kg$ ) se déplaçant à  $10^5$  m/s. Si on connaît sa vitesse à 1% près, quelle sera la plus petite valeur possible de l'incertitude sur sa position ? Commentez, sachant que l'ordre de grandeur de la taille d'un nuage électronique est de 100pm.

Si on connaît la vitesse à 1% près, cela signifie que  $\Delta v/v=0,01$ . On a donc :

$$\Delta p = m * 0,01v = 9,11 * 10^{-31} kg * 0,01 * 10^5 m/s = 9,11 * 10^{-28} kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

Avec  $\Delta x \geq \hbar/(4\pi\Delta p)$  :

$$\Delta x \geq 0,527 * 10^{-34} J \cdot s \cdot \frac{1}{9,11 * 10^{-28} kg \cdot m/s} \quad \text{i.e. : } \Delta x \geq 58nm$$

On a un objet qui mesure environ 100pm ( $2a_0$ ) et on le connaît avec une précision de l'ordre de 58000 pm. Un ballon de football fait environ 30cm de diamètre et un terrain fait 90m : cela revient donc à dire qu'on connaît la position du ballon +/- la taille de deux terrains, donc qu'on ne sait pas où est le ballon.

On assimilera écart-type et incertitude dans la formule de Heisenberg :  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ .

#### 17.1.2 Spectres et énergie d'ionisation

1. Dans le spectre d'émission de l'hydrogène, on trouve une série (dite de Balmer) dont les longueurs d'onde sont 656,46 nm, 486,27 nm, 434,17 nm et 410,29 nm. Quelle est la longueur d'onde de la raie suivante ?

On a vu que l'énergie dans le cas de l'atome d'hydrogène s'écrit  $E_n = -\frac{Ry}{n^2}$  avec  $Ry = 13,6eV$ . Pour une émission entre une couche  $p$  et une couche  $n$  on a donc :

$$E_p - E_n = -Ry \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{hc}{\lambda}$$

D'où :

$$\lambda_{p \rightarrow n} = \frac{hc}{Ry \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)}$$

On commence par supposer que  $n = 1$ . La transition de  $p = 2$  à  $n = 1$  correspond à une longueur d'onde de  $121,5 \text{ nm}$ . Si  $p$  augmente,  $\lambda$  va diminuer. La série considérée ne correspond donc pas à un retour sur une couche  $n = 1$ .

On suppose donc que  $n = 2$ . La transition de  $p = 3$  à  $n = 2$  correspond à une longueur d'onde de  $656,39 \text{ nm}$  qui est l'une des longueurs d'onde données. Les transitions entre  $p = 4, 5, 6$  et  $n = 2$  correspondent aux autres longueurs d'onde de la série. La longueur d'onde de la raie suivante est donc  $\lambda_{7 \rightarrow 2} = 397,07 \text{ nm}$ .

2. On considère l'ion  $C^{5+}$ . Quelles sont les longueurs d'onde extrêmes de la série pour laquelle l'état final de l'électron est  $3s$ .

$C^{5+}$  est un hydrogénoïde. On regarde les transitions dont l'état final est avec  $n=3$ , donc les transitions  $4 \rightarrow 3$ ,  $5 \rightarrow 3$ ,  $6 \rightarrow 3$ ,  $7 \rightarrow 3$ , etc... Les transitions extrêmes sont  $4 \rightarrow 3$  et  $\infty \rightarrow 3$ . Pour la première,  $\Delta E = 23,8 \text{ eV}$  et  $\lambda = 52,2 \text{ nm}$ . Pour la seconde,  $\Delta E = 54,4 \text{ eV}$  et  $\lambda = 22,8 \text{ nm}$ .

3. Quel est l'énergie d'ionisation de  $C^{5+}$  lorsqu'il est dans son état fondamental ?

$$E_i(C^{5+}) = 489,6 \text{ eV} = 7,8 * 10^{-17} \text{ J}$$

### 17.1.3 Configuration électronique et orbitale

1. Donnez la configuration électronique fondamentale du platine ( $Z = 78$ ) qui respecte la règle de Klechkowski. Sachant que les niveaux des OA  $6s$  et  $5d$  sont très proches en énergie, proposer deux autres configurations électroniques possibles pour cet atome dans son état fondamental.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2 4f^{14} 5d^8 \\ 6s^1 4f^{14} 5d^9 \\ 6s^0 4f^{14} 5d^{10} \end{aligned}$$

2. Le cuivre ( $Z = 29$ ) a une orbitale dont l'expression mathématique en coordonnées sphériques est donnée ci-dessous. Dessiner cette orbitale dans le plan, en prenant soin de libeller les axes, et nommer là.

$$\phi = -\frac{1}{81\sqrt{2}\pi} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{7/2} e^{-\frac{Zr}{3a_0}} \cdot 2r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\varphi)$$

Dans la fonction  $\Psi$ , au dénominateur de l'exponentielle on lit  $3a_0$  : donc  $n=3$ . On rappelle que  $z = r \cdot \cos(\theta)$ ,  $x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$ ,  $y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$ . On constate donc que cette orbitale est proportionnelle à  $x * z$  : c'est l'orbitale  $3d_{xz}$ .

### 17.1.4 Modèle de Slater

On se place dans le cadre du modèle de Slater défini Partie 4.6. Calculer :

1. les énergies de première et de seconde ionisation du carbone ;

L'énergie de première ionisation correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour arracher un électron selon la réaction :  $C \rightarrow C^+ + e^-$  ; c'est une grandeur définie comme étant positive i.e.  $PI = E_{C^+} - E_C$ .

$$E_C = 2 \cdot E(1s_C) + 4 \cdot E(2s_C, 2p_C)$$

$$E_{C^+} = 2 \cdot E(1s_{C^+}) + 3 \cdot E(2s_{C^+}, 2p_{C^+})$$

Comme l'énergie d'un électron 1s est la même dans  $C$  et dans  $C^+$ , il n'y a pas besoin de calculer cette valeur puisque les termes se compenseront lorsqu'on fera la différence.

$$Z^*(2s, 2p)_C = Z - \sigma = 6 - (2 \cdot 0,85 + 3 \cdot 0,35) = 3,25$$

$$Z^*(2s, 2p)_{C^+} = 6 - (2 \cdot 0,85 + 2 \cdot 0,35) = 3,60$$

On peut donc écrire :

$$PI = 3 \cdot E(2s, 2p)_{C^+} - 4 \cdot E(2s, 2p)_C$$

$$= -13,6 \times \left[ 3 \cdot \left( \frac{3,60}{2} \right)^2 - 4 \cdot \left( \frac{3,25}{2} \right)^2 \right] = 11,5 eV$$

L'énergie de deuxième ionisation est celle pour la réaction :  $C^+ \rightarrow C^{2+} + e^-$  i.e.  $PI_2 = E_{C^{2+}} - E_{C^+}$ . On ne calcule que ce qui nous manque :

$$Z^*(2s, 2p)_{C^{2+}} = 6 - (2 \cdot 0,85 + 0,35) = 3,95$$

D'où :

$$PI_2 = 2 \cdot E(2s, 2p)_{C^{2+}} - 3 \cdot E(2s, 2p)_{C^+}$$

$$= -13,6 \times \left[ 2 \cdot \left( \frac{3,95}{2} \right)^2 - 3 \cdot \left( \frac{3,60}{2} \right)^2 \right] = 26,1 eV$$

2. l'énergie d'extraction  $E_{extr}(1s)$  d'un électron 1s du carbone ;

Le produit de la réaction sera le carbone dans la configuration :  $1s^1 2s^2 2p^2$

$$Z^*(1s)_C = 6 - 0,30 = 5,70$$

$$Z^*(1s)_{C_{1s}^+} = Z = 6$$

$$Z^*(2s, 2p)_{C_{1s}^+} = 6 - (0,85 + 3 \cdot 0,35) = 4,10$$

D'où :

$$E_{extr}(1s) = E_{C_{1s}^+} - E_C = 1 \cdot E(1s)_{C_{1s}^+} + 4 \cdot E(2s, 2p)_{C_{1s}^+} - 2 \cdot E(1s)_C - 4 \cdot E(2s, 2p)_C$$

$$= -13,6 \cdot \left[ \left( \frac{6}{1} \right)^2 + 4 \cdot \left( \frac{4,10}{2} \right)^2 - 2 \cdot \left( \frac{5,70}{1} \right)^2 - 4 \cdot \left( \frac{3,25}{2} \right)^2 \right] = 309,2 eV$$

3. les rayons des atomes et ions suivants : He, F, F<sup>-</sup>, Mg, Mg<sup>2+</sup> (on admet que le rayon d'un atome peut être assimilé au rayon de l'orbitale atomique la plus externe).

$$\text{On rappelle que : } \rho = \frac{(n^*)^2}{Z^*} a_0 \quad \text{avec } a_0 = 52,92 \text{ pm}$$

$$\text{He : } 1s^2 : Z^*(1s)_{\text{He}} = 2 - 0,30 = 1,70 : \rho = 31,1 \text{ pm}$$

$$\text{F : } 1s^2 2s^2 2p^5 : Z^*(2s, 2p)_{\text{F}} = 9 - (6 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,85) = 5,20 : \rho = 40,7 \text{ pm}$$

$$\text{F}^- : 1s^2 2s^2 2p^6 : Z^*(2s, 2p)_{\text{F}^-} = 9 - (7 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,85) = 4,85 : \rho = 43,6 \text{ pm}$$

$$\text{Mg : } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 : Z^*(3s)_{\text{Mg}} = 12 - (0,35 + 8 \cdot 0,85 + 2 \cdot 1) = 2,85 : \rho = 167,1 \text{ pm}$$

$$\text{Mg}^{2+} : 1s^2 2s^2 2p^6 \text{ (comme pour F}^-, \text{ donc le même écrantage, mais avec un noyau différent) : } Z^*(2s, 2p)_{\text{Mg}^{2+}} = 7,85 : \rho = 27,0 \text{ pm.}$$

On constate que le rayon calculé de Mg<sup>2+</sup> est très éloignée de la valeur expérimentale (66 pm); il en est de même pour F<sup>-</sup> dont le rayon est 136 pm. La formule de Slater donne des résultats corrects pour les atomes mais pas pour les ions atomiques.

### 17.1.5 Classification périodique

1. Dessiner schématiquement (i.e. par bloc) la classification périodique dans son format étendu, en incluant le bloc g. Préciser la taille de chaque bloc.

En utilisant le schéma pour la règle de Klechkowski, on voit que le bloc 5g sera après les 8s. Le bloc p a 6 éléments, le d a 10 éléments, le f a 14 éléments. Pour le bloc g, il en aura 4 de plus donc 18 éléments.



2. L'un des derniers éléments synthétisés est un gaz noble. Il est sur la 7ème période. Quel est son numéro atomique ?

Il y a 2 éléments sur la 1ère ligne, 8 sur les 2ème et 3ème ligne, 18 éléments sur les 4ème et 5ème lignes et 32 (=18+14) sur les 6ème et 7ème lignes. Le numéro atomique du oganesson (Og) est donc Z=118.

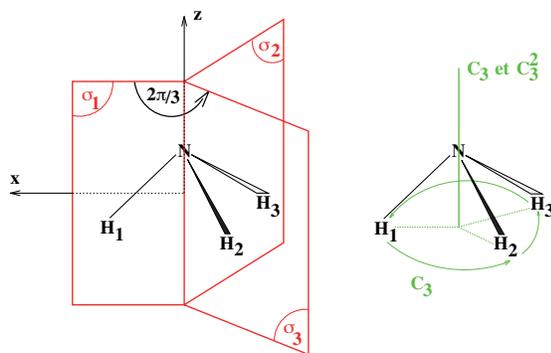
## 17.2 Théorie des groupes

### 17.2.1 Opérations de symétrie, classes et groupes de symétrie

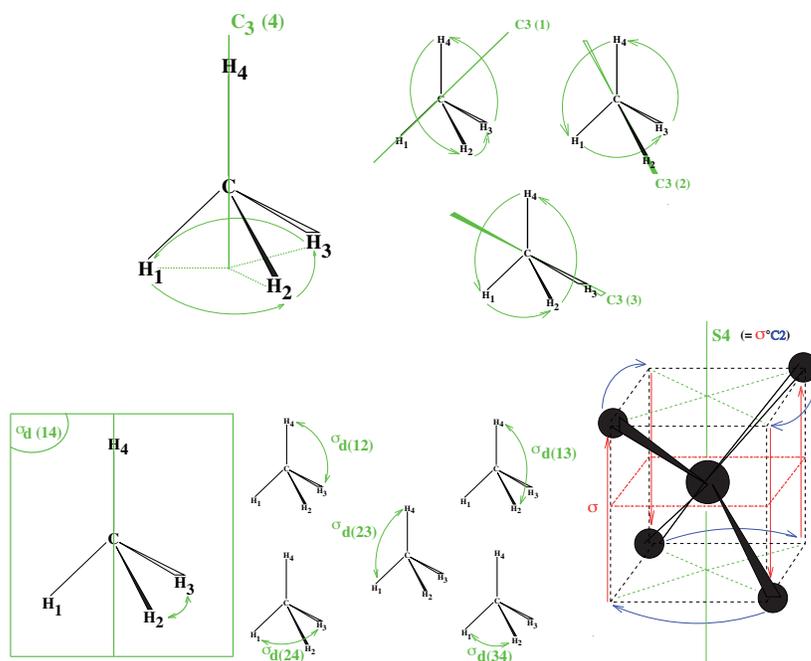
1. Faire la liste des opérations de symétrie pour les molécules suivantes, dans leurs géométries d'équilibre : NH<sub>3</sub>, CH<sub>4</sub>, SF<sub>6</sub>, N<sub>2</sub>.

Pour vérifier qu'on a la liste de toutes les opérations, il faut déterminer le groupe ponctuel de symétrie et regarder la première ligne de sa table de caractères.

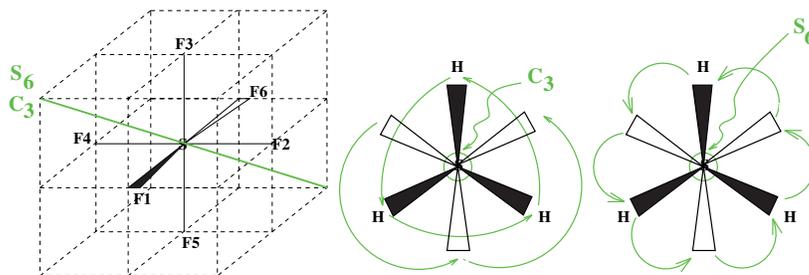
Pour l'ammoniac :  $E, C_3^1, C_3^2, \sigma_{v1}, \sigma_{v2}, \sigma_{v3}$  (groupe  $C_{3v}$ ). On voit ici la différence entre l'élément de symétrie  $C_3$  et l'opération  $C_3^1$ .

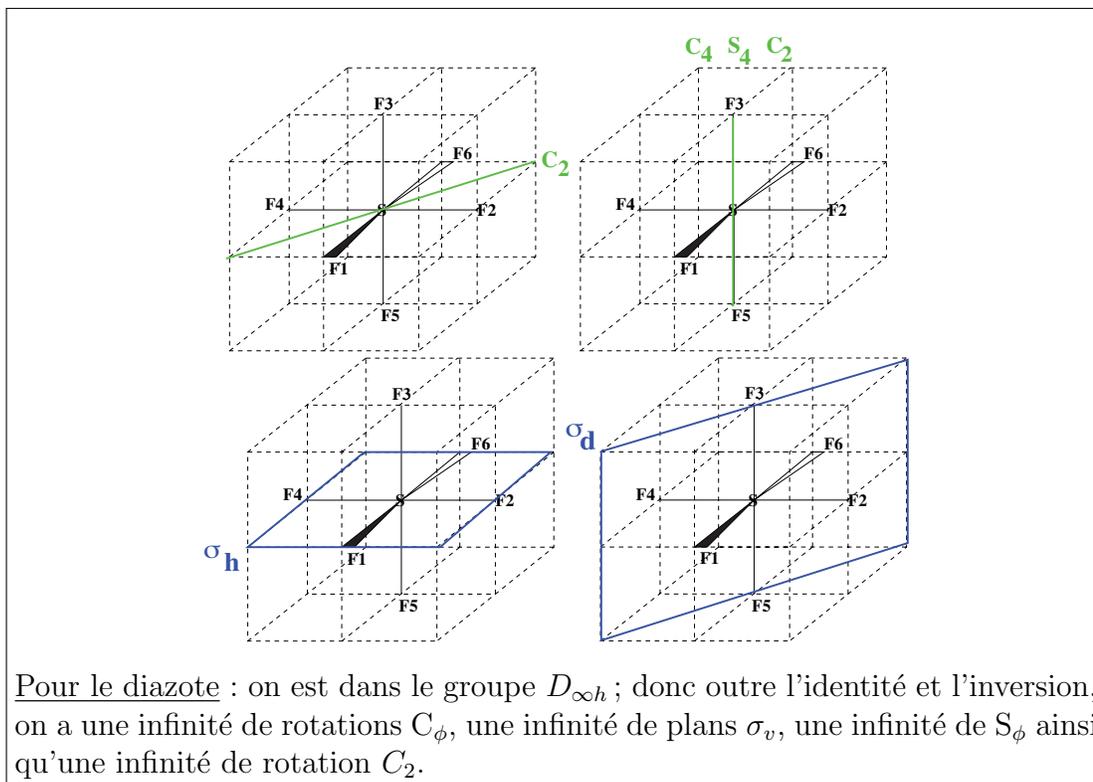


Pour le méthane :  $E, 4C_3^1, 4C_3^2, 6\sigma_d, 3C_2, 3S_4^1, 3S_4^3$  (groupe  $T_d$ ). On ne prend pas en compte  $S_4^2$  car il correspond à  $C_2$  ; de manière générale,  $S_{2n}^{2k} = C_n^k$ .



Pour l'hexafluorosulfure :  $E, 4C_3^1, 4C_3^2, 4S_6^1, 4S_6^5, i, 3C_4^1, 3C_4^3, 3C_2(=C_4^2), 3S_4^1, 3S_4^3, 6C_2', 3\sigma_h, 6\sigma_d$  (groupe  $O_h$ ) ( $S_2 = i$  donc on ne la prend pas en compte).

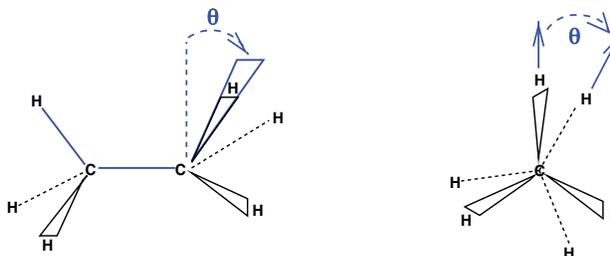




2. A quels groupes ponctuels de symétrie appartiennent les molécules suivantes dans leurs géométries d'équilibre ?
- $\text{CH}_4$ ,  $\text{CH}_3\text{D}$ ,  $\text{CH}_2\text{D}_2$  ;
  - $\text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_2$  (configurations Z et E) ;
  - $\text{C}_2\text{H}_6$  (conformations : éclipsée, décalée, intermédiaire) ;
  - Cyclohexane en conformation chaise.

On se sert de l'organigramme ou de son intuition/expérience.

- $\text{CH}_4$  :  $T_d$ ,  $\text{CH}_3\text{D}$  :  $C_{3v}$ ,  $\text{CH}_2\text{D}_2$  :  $C_{2v}$
- $\text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_2$  configuration Z :  $C_{2v}$ ,  $\text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_2$  configuration E :  $C_{2h}$
- $\text{C}_2\text{H}_6$  conformation éclipsée :  $D_{3h}$ ,  $\text{C}_2\text{H}_6$  conformation décalée :  $D_{3d}$ ,  $\text{C}_2\text{H}_6$  conformation intermédiaire :  $D_3$



- Cyclohexane en conformation chaise :  $D_{3d}$  : il faut le représenter un peu penché, on voit alors un axe  $C_3$  perpendiculaire au plan moyen du cycle et 3 plans  $\sigma_d$  contenant l'axe  $C_3$  et passant par des carbones opposés.

### 17.2.2 Représentations d'un groupe ponctuel

1. Déterminer la représentation matricielle du groupe ponctuel de symétrie de  $\text{NH}_3$  (dans sa géométrie d'équilibre) dans une base orthonormée de  $R^3$ . Où doit-on placer l'origine de la base de représentation ?

On place l'origine de la base sur N, et on prend l'axe  $z$  aligné avec l'axe  $C_3$  et l'axe  $x$  dans le plan  $(NH_1, z)$  (comme sur la figure de la question 17.2.1-1.). Pour les matrices de  $C_3^1$  et de  $C_3^2$  ce sont des matrices de rotations. Pour les matrices des opérations  $\sigma_v$ , il faut revenir à des matrices de rotations et chercher les angles associés. Le plus simple est de regarder comment se transforme chaque élément de la base; la transformation du  $i$ -ème élément donnera la  $i$ -ème colonne.

$$M(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(C_3^1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(C_3^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(\sigma_{v1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(\sigma_{v2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(\sigma_{v3}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate qu'on peut écrire la base sous la forme  $\{x, y\} \oplus \{z\}$  car  $z$  ne se mélange pas à  $x$  et  $y$ .

2. Déterminer les représentations matricielles des opérateurs de symétrie de  $NH_3$  (dans sa géométrie d'équilibre) dans la base des orbitales  $1s$  des 3 atomes d'hydrogène. Pourrait-on réduire cette base en ne prenant qu'une ou deux des orbitales? Exprimer ces matrices dans la base  $\{1s_1 + 1s_2 + 1s_3, 2 \cdot 1s_1 - 1s_2 - 1s_3, 2 \cdot 1s_2 - 1s_3 - 1s_1\}$ .

On n'écrit les matrices que pour  $E, C_3^1, \sigma_{v1}$  :

$$M(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(C_3^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; M(\sigma_{v1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On ne peut bien sûr pas prendre moins de trois orbitales puisqu'alors on n'a plus un système générateur (i.e. on ne peut pas décrire tout l'espace considéré) : ce n'est donc plus une base. Dans la base proposée, les matrices s'écrivent :

$$M(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(C_3^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; M(\sigma_{v1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les matrices sont diagonales par blocs avec un bloc de dimension 1 et un bloc de dimension 2. Ceci est plus commode à manipuler. On ne peut pas rendre certains blocs diagonales pour toutes les opérations, c'est pour ça que certaines RI sont de dimensions 2 voire 3.

On verra par la suite que ces combinaisons linéaires ne sortent pas de n'importe où. On a une représentation  $\Gamma = \{3 \ 0 \ 1\}$  qui se réduit en  $A_1 \oplus E$  (on rappelle que  $E$  est de dimension 2, on reste donc bien en dimension 3). En utilisant les formules de projection, on trouve qu'une base de  $A_1$  est  $1s_1 + 1s_2 + 1s_3$  et que  $\{2 \cdot 1s_1 - 1s_2 - 1s_3, 2 \cdot 1s_2 - 1s_3 - 1s_1\}$  est une base de  $E$ .

3. Déterminer les représentations matricielles des opérateurs de symétrie de  $NH_3$  (dans sa géométrie d'équilibre) dans la base des orbitales  $(p_x, p_y, p_z)$  de l'atome d'azote. Comment faire pour en déduire la représentation sur la base des orbitales  $(p_1, p_0, p_{-1})$  de l'atome d'azote?

On a bien évidemment ici la même représentation matricielle pour une base  $\{p_x, p_y, p_z\}$  que pour une base  $\{x, y, z\}$  et là aussi on ne peut pas prendre moins d'orbitales. De plus, il faut se souvenir que  $p_x = \frac{p_1 - p_{-1}}{\sqrt{2}}$ ,  $p_y = \frac{p_1 + p_{-1}}{i\sqrt{2}}$ ,  $p_z = p_0$ . On a donc :  $p_1 = \frac{p_x + ip_y}{\sqrt{2}}$ ,  $p_{-1} = \frac{ip_y - p_x}{\sqrt{2}}$ ,  $p_0 = p_z$ . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} C_3^1(p_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_3^1(p_x) + iC_3^1(p_y)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{2}p_x + \frac{\sqrt{3}}{2}p_y \right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}p_x - \frac{1}{2}p_y \right) \\ &= -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \left( \frac{p_x + ip_y}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Dans la base  $\{p_1, p_{-1}, p_0\}$  on a donc :

$$M(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(C_3^1) = \begin{pmatrix} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M(\sigma_{v,xz}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 17.2.3 Réduction d'une représentation

Réduire en représentations irréductibles les représentations des groupes de symétrie des molécules suivantes dans les bases données :

1. Pour la molécule  $\text{NH}_3$  : base des orbitales  $1s$  des hydrogènes et base des orbitales ( $2p_x, 2p_y, 2p_z$ ) de l'atome d'azote.

Pour trouver une représentation, ce qu'on fait le plus couramment est de prendre chaque opération du groupe de symétrie (qu'il faut donc au préalable déterminer) et regarder comment est transformé chaque élément de la base ; on s'intéresse à la trace, donc on va sommer les éléments diagonaux de la matrice. On a donc juste besoin de savoir si chaque élément est transformé en lui-même, en un autre ou en une combinaison linéaire des éléments de la base. Dans la base des orbitales  $1s$  des hydrogènes par exemple, pour l'identité chaque élément reste lui-même on a donc un caractère de 3. Pour les rotations  $C_3$ , chaque élément de la base devient un autre ( $1s_1$  devient  $1s_2$  par exemple) on a donc 0. Pour les plans de symétrie, une orbitale est inchangée (celle contenue dans le plan). On a donc :  $\Gamma_3 = \{3 \ 0 \ 1\}$ . On réduit ensuite en utilisant les formules du cours. On va détailler ici ce calcul pour être bien clair :

| $C_{3v}$   | E        | $2C_3$   | $3\sigma_v$ |
|------------|----------|----------|-------------|
| $A_1$      | +1       | +1       | +1          |
| $A_2$      | +1       | +1       | -1          |
| $E$        | +2       | -1       | 0           |
| $\Gamma_3$ | <b>3</b> | <b>0</b> | <b>1</b>    |

$$\begin{aligned} n_{A_1} &= \frac{1}{6} \left( 1 \times (+1) \times \mathbf{3} + 2 \times (+1) \times \mathbf{0} + 3 \times (+1) \times \mathbf{1} \right) = \frac{1}{6} (3 + 0 + 3) = 1 \\ n_{A_2} &= \frac{1}{6} \left( 1 \times (+1) \times \mathbf{3} + 2 \times (+1) \times \mathbf{0} + 3 \times (-1) \times \mathbf{1} \right) = \frac{1}{6} (3 + 0 - 3) = 0 \end{aligned}$$

$$n_E = \frac{1}{6} \left( 1 \times (+2) \times \mathbf{3} + 2 \times (-1) \times \mathbf{0} + 3 \times (0) \times \mathbf{1} \right) = \frac{1}{6} (6 + 0 + 0) = 1$$

On trouve donc  $\Gamma_3 = A_1 \oplus E$ . On vérifie très facilement qu'on ne s'est pas trompé en sommant les caractères de  $A_1$  et de  $E$  pour chaque opération : on retrouve  $\{3 \ 0 \ 1\}$ . On a ici fait une somme sur les classes de symétrie, en faisant apparaître le nombre d'opérations dans chaque classe (respectivement 1, 2 et 3). Si on ne trouve pas des entiers, c'est qu'il y a une erreur.

La base des orbitales  $(p_x, p_y, p_z)$  est de dimension 3, tout comme celle des orbitales  $1s$  des hydrogènes. Or la trace est indépendante de la base dans une dimension donnée. On a donc le même résultat pour la base des orbitales  $p$  que pour la base des orbitales  $1s$ .

2. Pour un complexe octaédrique d'un métal de transition : base constituée des 5 orbitales  $d$  de l'atome métallique.

Ici on est obligé de procéder de manière un peu différente à ce qu'on fait usuellement. On va explicitement écrire ce que devient chaque élément de la base suite à chaque opération pour pouvoir trouver les caractères qu'on cherche. On travaille dans le groupe  $O_h$ , avec la base  $\{d_{2z^2-x^2-y^2}, d_{x^2-y^2}, d_{xy}, d_{yz}, d_{xz}\}$ . Il faut bien se rappeler que quand on note  $d_{x^2-y^2}$ , la forme mathématique de l'orbitale est proportionnelle à  $x^2 - y^2$ . Ce qu'on va faire ici, va être de regarder les effets des opérations de symétrie sur les coordonnées cartésiennes, puis d'en déduire la décomposition sur la base de la nouvelle orbitale pour trouver la diagonale de la matrice (qu'on note sous forme de colonne). On ne regardera qu'un élément par classe (et on en prendra un pour lequel la transformation du trièdre est facile à voir). Pour les opérations de symétrie, on précise un ou deux points de l'espace contenu dans l'axe ou le plan considéré, le dernier point nécessaire étant bien entendu le métal i.e. le point  $(0,0,0)$ .

$$C_3(1, 1, 1) : \begin{pmatrix} x & \rightarrow & y \\ y & \rightarrow & z \\ z & \rightarrow & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z^2 - x^2 - y^2 & \rightarrow & 2x^2 - y^2 - z^2 \\ x^2 - y^2 & \rightarrow & y^2 - z^2 \\ xy & \rightarrow & yz \\ yz & \rightarrow & xz \\ xz & \rightarrow & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Car} : 2x^2 - y^2 - z^2 = \frac{3}{2}(x^2 - y^2) - \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2) \text{ et } y^2 - z^2 = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) - \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2)$$

$$C_2(1, 1, 0) (\neq C_4^2) : \begin{pmatrix} x & \rightarrow & y \\ y & \rightarrow & x \\ z & \rightarrow & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z^2 - x^2 - y^2 & \rightarrow & 2z^2 - x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & \rightarrow & y^2 - x^2 \\ xy & \rightarrow & xy \\ yz & \rightarrow & -xz \\ xz & \rightarrow & -yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_4(0, 0, 1) : \begin{pmatrix} x & \rightarrow & y \\ y & \rightarrow & -x \\ z & \rightarrow & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z^2 - x^2 - y^2 & \rightarrow & 2z^2 - x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & \rightarrow & y^2 - x^2 \\ xy & \rightarrow & -xy \\ yz & \rightarrow & -xz \\ xz & \rightarrow & yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_4^2(0,0,1) : \begin{pmatrix} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \\ z \rightarrow z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z^2 - x^2 - y^2 \rightarrow 2z^2 - x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 \rightarrow x^2 - y^2 \\ xy \rightarrow xy \\ yz \rightarrow -yz \\ xz \rightarrow -xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$i(0,0,0) : \begin{pmatrix} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \\ z \rightarrow -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z^2 - x^2 - y^2 \rightarrow 2z^2 - x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 \rightarrow x^2 - y^2 \\ xy \rightarrow xy \\ yz \rightarrow yz \\ xz \rightarrow xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$S_4(0,0,1) : \begin{pmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow -x \\ z \rightarrow -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z^2 - x^2 - y^2 \rightarrow 2z^2 - x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 \rightarrow y^2 - x^2 \\ xy \rightarrow -xy \\ yz \rightarrow xz \\ xz \rightarrow -yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_6(1,1,1) : \begin{pmatrix} x \rightarrow -z \\ y \rightarrow -x \\ z \rightarrow -y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z^2 - x^2 - y^2 \rightarrow 2y^2 - x^2 - z^2 \\ x^2 - y^2 \rightarrow z^2 - x^2 \\ xy \rightarrow xz \\ yz \rightarrow xy \\ xz \rightarrow yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_h(1,0,0)(0,1,0) : \begin{pmatrix} x \rightarrow x \\ y \rightarrow y \\ z \rightarrow -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z^2 - x^2 - y^2 \rightarrow 2z^2 - x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 \rightarrow x^2 - y^2 \\ xy \rightarrow xy \\ yz \rightarrow -yz \\ xz \rightarrow -xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_d(1,0,0)(1,1,0) : \begin{pmatrix} x \rightarrow y \\ y \rightarrow x \\ z \rightarrow z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2z^2 - x^2 - y^2 \rightarrow 2z^2 - x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 \rightarrow y^2 - x^2 \\ xy \rightarrow xy \\ yz \rightarrow xz \\ xz \rightarrow yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire la représentation réductible :

| $O_h$      | E | $8C_3$ | $6C_2$ | $6C_4$ | $3C_4^2$ | i | $6S_4$ | $8S_6$ | $3\sigma_h$ | $6\sigma_d$ |
|------------|---|--------|--------|--------|----------|---|--------|--------|-------------|-------------|
| $\Gamma_d$ | 5 | -1     | 1      | -1     | 1        | 5 | -1     | -1     | 1           | 1           |

que l'on peut décomposer en  $\Gamma_d = E_g \oplus T_{2g}$ . On retrouve les labels de symétrie des orbitales des métaux dans la théorie du champ cristallin ou dans la théorie du champ des ligands. On peut directement lire dans la table de caractères (dernier bloc) les bases de chaque RI (on pourra le vérifier avec les formules de projection) : ce sont les orbitales elles-mêmes,  $d_{2z^2-x^2-y^2}$  et  $d_{x^2-y^2}$  pour  $E_g$  et  $d_{xy}$ ,  $d_{yz}$  et  $d_{yz}$  pour  $T_{2g}$ .

En déduire ensuite les orbitales moléculaires de symétrie de  $\text{NH}_3$  par exemple dans la bases des orbitales 1s des hydrogènes.

On utilise cette fois les formules de projections. Attention, il y a ici une erreur très classique : dans la formule de projection, la somme se fait sur les opérations de symétrie, et pas sur les classes de symétrie : on projette une orbitale sur une RI, et chaque opération de symétrie d'une même classe donne un résultat différent. On détaille le calcul pour  $\text{NH}_3$  dans la base des orbitales 1s des hydrogènes (on rappelle la table de caractères et que  $\Gamma_3 = A_1 \oplus E$ ) :

| $C_{3v}$ | E  | $2C_3$ | $3\sigma_v$ |
|----------|----|--------|-------------|
| $A_1$    | +1 | +1     | +1          |
| $A_2$    | +1 | +1     | -1          |
| $E$      | +2 | -1     | 0           |

$$\begin{aligned}\hat{P}^{(A_1)}(1s_1) &\propto (+1)\hat{E}(1s_1) + (+1)\hat{C}_3^1(1s_1) + (+1)\hat{C}_3^2(1s_1) + (+1)\hat{\sigma}_{v,NH_1}(1s_1) + (+1)\hat{\sigma}_{v,NH_2}(1s_1) \\ &\quad + (+1)\hat{\sigma}_{v,NH_3}(1s_1) \\ &\propto 1s_1 + 1s_2 + 1s_3 + 1s_1 + 1s_2 + 1s_3 \\ &\propto 1s_1 + 1s_2 + 1s_3\end{aligned}$$

Les projections de  $1s_2$  et de  $1s_3$  donnent exactement le même résultat. Le résultat trouvé se vérifie très facilement : l'orbitale  $1s_1 + 1s_2 + 1s_3$  reste elle-même pour toutes les opérations de symétrie du groupe : ce elle-même est l'écriture du caractère +1 des 3 classes. On pourra vérifier que la projection sur  $A_2$  donne 0. Intéressons-nous maintenant à la projection sur  $E$  :

$$\begin{aligned}\hat{P}^{(E)}(1s_1) &\propto 2 \cdot 1s_1 - 1s_2 - 1s_3 \\ \hat{P}^{(E)}(1s_2) &\propto 2 \cdot 1s_2 - 1s_3 - 1s_1 \\ \hat{P}^{(E)}(1s_3) &\propto 2 \cdot 1s_3 - 1s_1 - 1s_2\end{aligned}$$

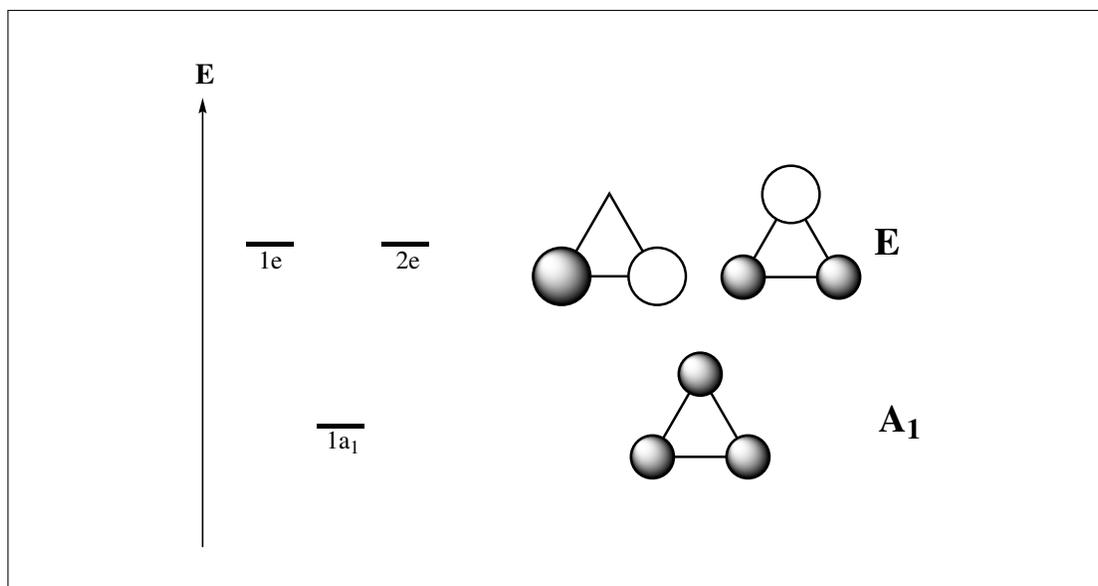
Seul le calcul de la projection de  $1s_1$  est nécessaire, on obtient les autres par permutations circulaires. On constate que la somme des 3 est nulle : c'est normal, la RI  $E$  est de dimension 2, il nous faut donc 2 éléments pour former une base. On fait ici une projection au sens mathématique du terme, à savoir qu'on cherche la composante d'un élément ( $1s_1$  par exemple) sur deux espaces ( $A_1$  et  $E$ ). On peut ainsi écrire :

$$1s_1 = \frac{1}{3} \underbrace{(1s_1 + 1s_2 + 1s_3)}_{\hat{P}^{(A_1)}(1s_1)} + \frac{1}{3} \underbrace{(2 \cdot 1s_1 - 1s_2 - 1s_3)}_{\hat{P}^{(E)}(1s_1)}$$

Et on pourra vérifier que la projection de  $1s_1 + 1s_2 + 1s_3$  sur  $A_1$  redonne  $1s_1 + 1s_2 + 1s_3$  alors que sa projection sur  $E$  donne 0. Il faut donc vraiment voir ça comme si on raisonnait dans l'espace et qu'on projette un point sur une droite ou sur un plan en cherchant ses coordonnées.

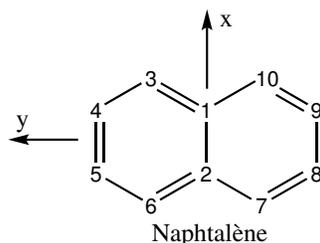
Si on cherche à établir une base orthogonale pour  $E$ , on peut faire la somme et la différence des 2 premières projections (faire la somme et la différence de deux orbitales pour en trouver deux nouvelles qui sont orthogonales n'est valable que si les orbitales sont normées ou ont même normes). On trouve alors comme base  $\{1s_1 + 1s_2 - 2 \cdot 1s_3 ; 1s_1 - 1s_2\}$ .

Lors de la construction d'un diagramme d'OM, on note les OM par la RI à laquelle elles appartiennent en minuscule : on parle d'étiquette de symétrie. Dans le diagramme d'OM du fragment  $H_3$ , on a donc une orbitale  $1a_1$  et deux orbitales  $1e$  et  $2e$ . Pour des orbitales dégénérées, on les labelle aussi parfois en ajoutant un élément de symétrie ( $1e_x$  et  $1e_y$  par exemple).



### 17.2.4 Application à la méthode de Hückel : le naphthalène

On s'intéresse ici au système  $\pi$  du naphthalène ( $C_{10}H_8$ ). Le but est de déterminer partiellement le diagramme d'orbitales moléculaires.



1. Écrire le déterminant séculaire du système dans la base constituée des orbitales  $2p_z$  de chacun des atomes de carbone.

Le déterminant s'écrit comme suit. On voit directement que le résoudre à la main n'est pas chose aisée.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

2. Trouver le groupe de symétrie de la molécule de naphthalène. Déterminer les orbitales bases des RI de la molécules construites à partir des orbitales  $2p_z$  de chaque atome de carbone.

Le groupe de symétrie de la molécule est  $D_{2h}$ . On peut décomposer la base en trois bases qui comportent les orbitales des atomes symétriquement équivalents :  $\Gamma_{10p} = \Gamma_{4,5,8,9} \oplus \Gamma_{3,6,7,10} \oplus \Gamma_{1,2}$  (les atomes 4, 5, 8 et 9 par exemple s'échangent entre eux par les différentes opérations de symétrie et ne se mélangent pas avec les autres atomes : ils forment donc un système stable par toutes les opérations de symétrie). Et on voit directement que les deux bases  $\Gamma_{4,5,8,9}$  et  $\Gamma_{3,6,7,10}$  sont bases de la même représentation. On a :

| $D_{2h}$           | $E$ | $C_2(z)$ | $C_2(y)$ | $C_2(x)$ | $i$ | $\sigma_{xy}$ | $\sigma_{xz}$ | $\sigma_{yz}$ |
|--------------------|-----|----------|----------|----------|-----|---------------|---------------|---------------|
| $\Gamma_{10p}$     | 10  | 0        | 0        | -2       | 0   | -10           | 2             | 0             |
| $\Gamma_{4,5,8,9}$ | 4   | 0        | 0        | 0        | 0   | -4            | 0             | 0             |
| $\Gamma_{1,2}$     | 2   | 0        | 0        | -2       | 0   | -2            | 2             | 0             |

Et on trouve :

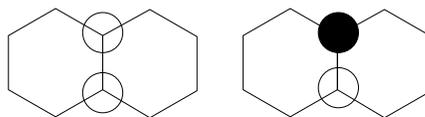
$$\Gamma_{4,5,8,9} = \Gamma_{3,6,7,10} = A_u \oplus B_{1u} \oplus B_{2g} \oplus B_{3g} \quad \text{et} \quad \Gamma_{1,2} = B_{1u} \oplus B_{2g}$$

$$\text{D'où : } \Gamma_{10p} = 2A_u \oplus 3B_{1u} \oplus 3B_{2g} \oplus 2B_{3g}$$

#### Détermination des OS

On a  $\Gamma_{1,2} = B_{1u} \oplus B_{2g}$ . On voit ici qu'on n'a pas trop le choix, et qu'on a forcément une des orbitales qui sera la somme de  $p_1$  et de  $p_2$ , et l'autre la différence. Celle qui sera la somme a la symétrie de  $T_z$  i.e. est  $B_{1u}$ , l'autre sera la  $B_{2g}$  (et a la même symétrie que  $R_y$ ) :

$$B_{1u} \text{ a pour base } \phi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2) ; \quad B_{2g} \text{ a pour base } \phi_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2)$$



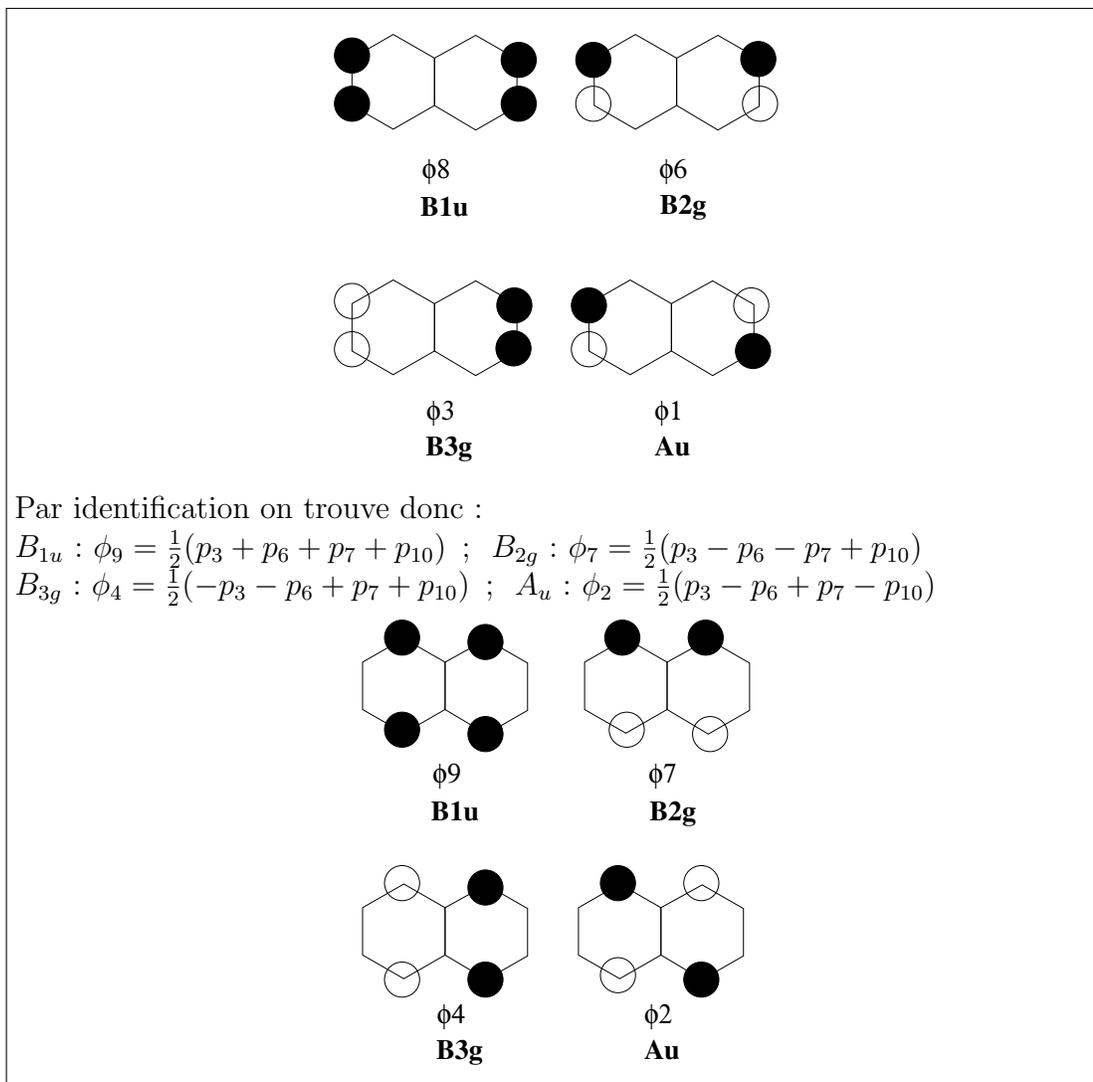
$\phi_{10}$   
**B<sub>1u</sub>**

$\phi_5$   
**B<sub>2g</sub>**

$\Gamma_{4,5,8,9} = \Gamma_{3,6,7,10} = A_u \oplus B_{1u} \oplus B_{2g} \oplus B_{3g}$ . Là aussi, l'orbitale de symétrie  $B_{1u}$  est facile à trouver, c'est la somme des 4 (symétrie  $T_z$ ). On peut trouver les OS pour  $B_{2g}$  et  $B_{3g}$  en regardant les rotations (même si ce n'est pas forcément le plus facile à voir). Pour la dernière RI, on peut se dire qu'on a 4 orbitales  $2p_z$  et donc que le problème ressemble au cyclobutadiène que l'on connaît, et donc en déduire la dernière orbitale de symétrie. En cas de doutes, le mieux à faire est de supposer une certaine combinaison linéaire pour une des bases de RI, et de vérifier si cette orbitale a bien la symétrie de la RI i.e. si l'effet des opérations est le bon en regardant les caractères de la RI. En cas de gros doutes, le mieux est de revenir aux projections. On trouve ici les bases suivantes :

$$B_{1u} : \phi_8 = \frac{1}{2}(p_4 + p_5 + p_8 + p_9) ; \quad B_{2g} : \phi_6 = \frac{1}{2}(p_4 - p_5 - p_8 + p_9)$$

$$B_{3g} : \phi_3 = \frac{1}{2}(-p_4 - p_5 + p_8 + p_9) ; \quad A_u : \phi_1 = \frac{1}{2}(p_4 - p_5 + p_8 - p_9)$$



3. Écrire le déterminant séculaire du système dans la base des orbitales de symétrie. Quel est l'intérêt du changement de base ? Déterminer les énergies des OM du naphthalène.

On va regrouper les combinaisons linéaires de même symétrie ensemble (dans l'ordre  $A_u, B_{3g}, B_{2g}, B_{1u}$  i.e.  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{10}$ ). On va donc avoir un déterminant diagonal par bloc (car on ne mélange pas des orbitales de symétrie différentes).

On va ici étudier chaque bloc de façon indépendante.

(a) Pour  $A_u$  :  $\phi_1$  et  $\phi_2$

On applique le hamiltonien de Hückel aux orbitales de symétrie qu'on décompose sur les orbitales atomiques.

$$\begin{aligned}
 H\phi_1 &= H \left( \frac{1}{2}(p_4 - p_5 + p_8 - p_9) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{Hp_4}_{\alpha p_4 + \beta(p_3 + p_5)} - \underbrace{Hp_5}_{\alpha p_5 + \beta(p_4 + p_6)} + \underbrace{Hp_8}_{\alpha p_8 + \beta(p_7 + p_9)} - \underbrace{Hp_9}_{\alpha p_9 + \beta(p_8 + p_{10})} \right) \\
 &= \frac{\alpha}{2}(p_4 - p_5 + p_8 - p_9) + \frac{\beta}{2} [(p_3 + p_5) - (p_4 + p_6) + (p_7 + p_9) - (p_8 + p_{10})] \\
 &= \alpha\phi_1 + \frac{\beta}{2} [-2\phi_1 + 2\phi_2] = (\alpha - \beta)\phi_1 + \beta\phi_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H\phi_2 &= \alpha\phi_2 + \frac{\beta}{2} [(p_1 + p_4) - (p_2 + p_5) + (p_2 + p_8) - (p_1 + p_9)] \\
 &= \alpha\phi_2 + \beta\phi_1
 \end{aligned}$$

Et on peut vérifier que :  $\langle \phi_2 | \phi_1 \rangle = 0$  et  $\langle \phi_2 | \phi_2 \rangle = \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle = 1$ . On a donc un bloc  $2 \times 2$  qui s'écrit dans la base  $\{\phi_1 ; \phi_2\}$  :

$$|H - E.Id| = \beta^2 \begin{vmatrix} x - 1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

Les énergies associées à ce déterminant sont solutions de  $x(x - 1) - 1 = 0$ , d'où :  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Les valeurs des énergies sont donc :

$$E_5 = E(1a_u) = \alpha + 0.618\beta \quad ; \quad E_9 = E(2a_u) = \alpha - 1.618\beta$$

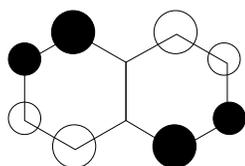
Pour la forme des orbitales, on re-écrit  $H\psi = E\psi$  en écrivant  $\psi$  sur la base  $\{\phi_1 ; \phi_2\}$  sous la forme  $(c_1 ; c_2)$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
 (x - 1)c_1 + c_2 &= 0 \\
 c_1^2 + c_2^2 &= 1
 \end{aligned}$$

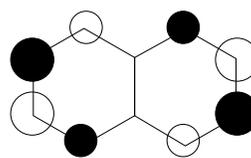
(vu qu'on a annulé le déterminant pour trouver les énergies, l'autre équation qui est  $c_1 + xc_2 = 0$  est proportionnelle à la première). Pour  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  on trouve  $c_2 = 1,618c_1$  et donc  $c_1 = 0,53$  et  $c_2 = 0,85$ . On a donc :

$\psi_5 = 0,265(p_4 - p_5 + p_8 - p_9) + 0,425(p_3 - p_6 + p_7 - p_{10})$  d'énergie  $\alpha + 0.618\beta$

Pour  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  on trouve  $\psi_9 = 0,85\phi_1 - 0,53\phi_2$ . Et on retrouve (aux erreurs d'arrondis près) les expressions des orbitales données dans l'énoncé qui ont la forme suivante :



**1a<sub>u</sub> (OM5)**



**2a<sub>u</sub> (OM9)**

(b) Pour  $B_{3g}$  :  $\phi_3$  et  $\phi_4$

On procède de la même façon :

$$\begin{aligned}
 H\phi_3 &= \alpha\phi_3 + \frac{\beta}{2} [-(p_5 + p_3) - (p_4 + p_6) + (p_7 + p_9) + (p_8 + p_{10})] \\
 &= (\alpha + \beta)\phi_3 + \beta\phi_4
 \end{aligned}$$

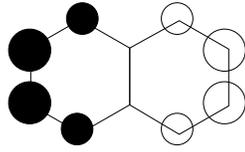
$$H\phi_4 = \alpha\phi_4 + \beta\phi_3$$

$$|H - E.Id| = \beta^2 \begin{vmatrix} x + 1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

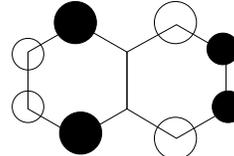
Les énergies associées à ce déterminant sont solutions de  $x(x + 1) - 1 = 0$ , d'où  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Les valeurs des énergies sont donc :

$$E_2 = E(1b_{3g}) = \alpha + 1.618\beta \quad ; \quad E_6 = E(2b_{3g}) = \alpha - 0.618\beta$$

On a donc  $\psi_2 = 0,85\phi_3 + 0,53\phi_4$  et  $\psi_6 = 0,53\phi_3 - 0,85\phi_4$ , et les orbitales ont la forme :



**1b\_3g (OM2)**



**2b\_3g (OM6)**

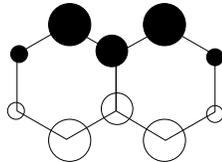
(c) Pour  $B_{2g}$  :  $\phi_5$ ,  $\phi_6$  et  $\phi_7$

$$|H - E.Id| = \beta^3 \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & x-1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & x \end{vmatrix}$$

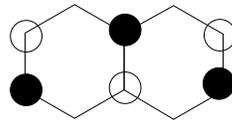
Les énergies associées à ce déterminant sont solutions de  $(x-1)[x(x-1)-3] = 0$ , d'où  $x = 1$  ;  $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ . Les valeurs des énergies sont donc :

$$E_3 = E(1b_{2g}) = \alpha + 1.303\beta \quad ; \quad E_7 = E(2b_{2g}) = \alpha - \beta \quad ; \quad E_{10} = E(3b_{2g}) = \alpha - 2.303\beta$$

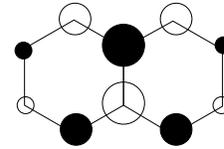
Pour  $x = -1,303$ , on trouve  $\psi_3 = 0,49\phi_5 + 0,35\phi_6 + 0,80\phi_7$  ; pour  $x = 1$ , on trouve  $\psi_7 = 0,58\phi_5 - 0,82\phi_7$  ; pour  $x = 2,303$ , on trouve  $\psi_{10} = -0,65\phi_5 - 0,46\phi_6 + 0,60\phi_7$  ; , et les orbitales ont la forme :



**1b\_2g (OM3)**



**2b\_2g (OM7)**



**3b\_2g (OM10)**

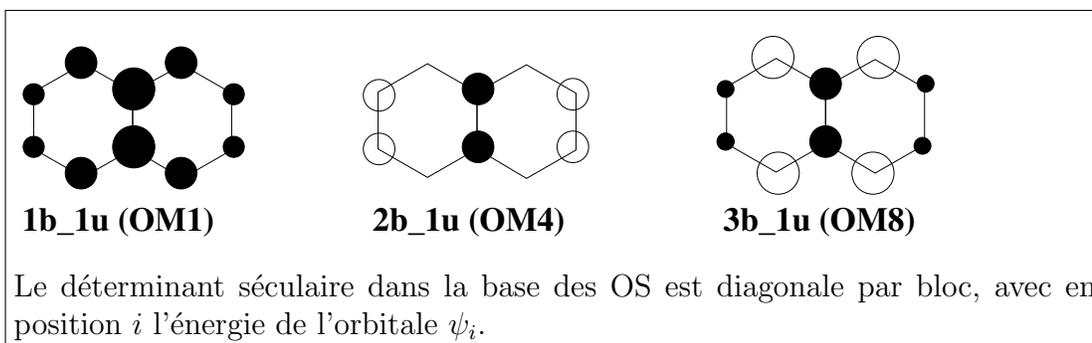
(d) Pour  $B_{1u}$  :  $\phi_8$ ,  $\phi_9$  et  $\phi_{10}$

$$|H - E.Id| = \beta^3 \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ 1 & x & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & x+1 \end{vmatrix}$$

Les énergies associées à ce déterminant sont solutions de  $(x+1)[x(x+1)-2] - (x+1) = (x+1)[x(x+1)-3] = 0$ , d'où :  $x = -1$  ;  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ . Les valeurs des énergies sont alors :

$$E_1 = E(1b_{1u}) = \alpha + 2.303\beta \quad ; \quad E_4 = E(2b_{1u}) = \alpha + \beta \quad ; \quad E_8 = E(3b_{1u}) = \alpha - 1.303\beta$$

Pour  $x = -2,303$ , on trouve  $\psi_1 = 0,65\phi_7 + 0,46\phi_8 + 0,60\phi_9$  ; pour  $x = -1$ , on trouve  $\psi_4 = 0,58\phi_7 - 0,82\phi_8$  ; pour  $x = 1,303$ , on trouve  $\psi_8 = -0,49\phi_7 - 0,35\phi_8 + 0,80\phi_9$ , et les orbitales ont la forme :



4. On donne les expressions des OM sous forme de CLAO, chaque ligne correspondant à la décomposition d'une orbitale moléculaire sur les différentes OA  $2p_z$ . Attribuer à chaque orbitale son énergie et tracer le diagramme d'OM du naphthalène.

On a numéroté les différentes énergies de la même façon que les OM du tableau. Le diagramme d'OM se trace directement par ordre croissant des énergies. La configuration électronique de l'état fondamental du naphthalène est alors :  $(1b_{1u})^2(1b_{3g})^2(1b_{2g})^2(1b_{1u})^2(1a_u)^2$ .

| atomes | 1      | 2     | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| OM1    | 0,461  | 0,461 | 0,301  | 0,231  | 0,231  | 0,301  | 0,301  | 0,231  | 0,231  | 0,301  |
| OM2    | 0,000  | 0,000 | 0,263  | 0,425  | 0,425  | 0,263  | -0,263 | -0,425 | -0,425 | -0,263 |
| OM3    | -0,347 | 0,347 | -0,400 | -0,174 | -0,174 | 0,400  | 0,400  | 0,174  | -0,174 | -0,400 |
| OM4    | 0,408  | 0,408 | 0,000  | -0,408 | -0,408 | 0,000  | 0,000  | -0,408 | -0,408 | 0,000  |
| OM5    | 0,000  | 0,000 | -0,425 | -0,263 | 0,263  | 0,425  | -0,425 | -0,263 | 0,263  | 0,425  |
| OM6    | 0,000  | 0,000 | -0,425 | 0,263  | 0,263  | -0,425 | 0,425  | -0,263 | -0,263 | 0,425  |
| OM7    | -0,408 | 0,408 | 0,000  | 0,408  | -0,408 | 0,000  | 0,000  | -0,408 | 0,408  | 0,000  |
| OM8    | 0,347  | 0,347 | -0,400 | 0,174  | 0,174  | -0,400 | -0,400 | 0,174  | 0,174  | -0,400 |
| OM9    | 0,000  | 0,000 | 0,263  | -0,425 | 0,425  | -0,263 | 0,263  | -0,425 | 0,425  | -0,263 |
| OM10   | -0,461 | 0,461 | 0,301  | -0,231 | 0,231  | -0,301 | -0,301 | 0,231  | -0,231 | 0,301  |

## 17.3 Diagrammes d'OM

### 17.3.1 Diagramme de Cl<sub>2</sub>

1. Tracer, en le justifiant, le diagramme d'OM de la molécule de dichlore et donner sa configuration électronique fondamentale.

On a vu dans les cours que "pour les molécules diatomiques de la troisième période, les orbitales 3s et 3p sont proches en énergie et on a donc des diagrammes corrélés. Il en sera donc de même pour tous les dihalogènes (autres que le difluor)". On va donc avoir pour le dichlore qualitativement le même diagramme d'OM que pour le diazote.

2. F<sub>2</sub>, Cl<sub>2</sub>, Br<sub>2</sub>, I<sub>2</sub> sont à l'état gazeux respectivement jaune, jaune-vert, rouge-brun, violet. Justifier cette évolution (on ne considérera pas le cas du dibrome qui est une exception ici).

Les couleurs de ces dihalogènes ont leurs longueurs d'onde vues qui diminuent, donc la couleur absorbée a sa longueur d'onde qui augmente donc une énergie de radiation qui diminue. La couleur vient d'une absorption entre les niveaux  $1\pi_g$  et  $2\sigma_u$ .

Les distances à l'équilibre sont :  $d(F - F) = 143pm$  ;  $d(Cl - Cl) = 199pm$  ;  $d(Br - Br) = 228pm$  ;  $d(I - I) = 266pm$ . Si la distance augmente, les recouvrements diminuent. On va donc stabiliser les orbitales antiliantes  $1\pi_g$  et  $2\sigma_u$  ; mais on va plus stabiliser la  $2\sigma_u$  car un recouvrement axial est plus important qu'un recouvrement latéral. On va donc diminuer la différence énergétique entre la  $1\pi_g$  et la  $2\sigma_u$  en augmentant la distance.

Précision : soyons honnêtes, cette conclusion n'est bonne qu'en première approche. Il ne faut en effet pas oublier que quand on descend dans la colonne des halogènes, on passe aussi à des orbitales de plus en plus diffuses. On ne peut donc pas en toute rigueur trancher aussi directement sur l'évolution du recouvrement. Cependant, avec des orbitales plus diffuses le recouvrement diminuera aussi donc la conclusion reste correcte. Si cet exercice est proposé, c'est pour vous entraîner à raisonner sur l'évolution des propriétés (ici l'énergie) quand on fait varier un paramètre (ici la distance).

### 17.3.2 Méthode des fragments : le méthane

On cherche l'allure du diagramme d'OM du méthane sous la forme de combinaisons linéaires des orbitales de valence des atomes constitutifs. Quelle est la base à considérer ?

On regardera la base  $\{2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z, 1s_1, 1s_2, 1s_3, 1s_4\}$ .

On envisage de construire les OM par combinaisons linéaires d'orbitales de C et de  $H_4$  qui ont des recouvrements non nuls. Tout d'abord on va étudier le fragment  $H_4$  tétraédrique, puis le fragment C, et finalement on considèrera les interactions entre les deux. On donne en unités atomiques les énergies des orbitales atomiques :  $2s_C = -0,706$  ;  $2p_C = -0,433$  ;  $1s_H = -0,5$ .

1. Justifier que l'on peut d'emblée, pour trouver les orbitales de symétrie, séparer les orbitales du carbone et les orbitales des hydrogènes.

Par toutes les opérations de symétrie du groupe  $T_d$ , les hydrogènes sont échangés entre eux, et C est conservé : on peut donc séparer l'étude du fragment des hydrogènes avec l'étude du C. On peut généraliser cela en disant que les bases d'orbitales qui sont restreintes à des atomes symétriquement équivalents sont stables par toutes les opérations du groupe, et une base qui contient des OA symétriquement non équivalents peut être réduite en somme directe de plusieurs bases.

2. Fragment  $H_4$  : Trouver le groupe de symétrie de  $H_4$  tétraédrique. Quels sont les caractères de la représentation de ce groupe dans la base des orbitales  $1s_H$  ? Décomposer la représentation en somme de représentations irréductibles ; donner les orbitales de symétrie construites à partir des orbitales  $1s_H$ . Pour la RI  $T_2$ , on cherchera des bases ayant les mêmes propriétés de symétrie que  $x$ ,  $y$  et  $z$  (c'est-à-dire ayant les mêmes caractères).

$H_4$  tétraédrique appartient au groupe ponctuel de symétrie  $T_d$ . On a  $\Gamma_4 = \{4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2\}$ . En utilisant les formules de réduction, on montre que  $A_1$  n'apparaît qu'une fois dans la réduction. Ensuite on constate que  $\{4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2\} - \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} = \{3 \ 0 \ -1 \ -1 \ 1\} = T_2$ . On peut donc écrire  $\Gamma_4 = A_1 \oplus T_2$ .

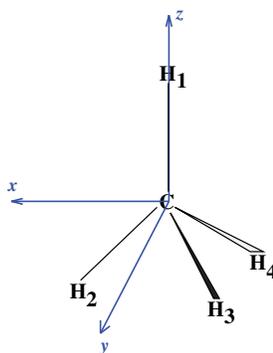
On trouve  $\hat{P}^{(A_1)}(1s_1) = \frac{1}{2}(1s_1 + 1s_2 + 1s_3 + 1s_4)$  (et pareil si on projete  $1s_2$ ,  $1s_3$  ou  $1s_4$ ). On cherche ensuite 3 fonctions de base de  $T_2$  :

$$\hat{P}^{(T_2)}(1s_1) = \frac{1}{\sqrt{12}} (3 \cdot 1s_1 - 1s_2 - 1s_3 - 1s_4)$$

$$\hat{P}^{(T_2)}(1s_2) = \frac{1}{\sqrt{12}} (3 \cdot 1s_2 - 1s_3 - 1s_4 - 1s_1)$$

$$\hat{P}^{(T_2)}(1s_3) = \frac{1}{\sqrt{12}} (3 \cdot 1s_3 - 1s_4 - 1s_1 - 1s_2)$$

On peut écrire une infinité de combinaisons linéaires de ces fonctions qui formeront une base de  $T_2$ . Comme on va coupler les orbitales avec le fragment C, on essaye de construire des combinaisons linéaires qui ont la même forme que les orbitales de C i.e. qui ont les mêmes propriétés de symétrie que  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On prend les notations suivantes :



On voit directement que  $\hat{P}^{(T_2)}(1s_1)$  est orienté selon  $z$ . Pour la suite, il est courant de dessiner l'orbitale que l'on cherche et d'essayer après de trouver la combinaison linéaire associée. Pour une orientation selon  $y$  par exemple, on peut se dire qu'on cherche une orbitale avec une composante sur  $1s_3$  et une sur  $1s_4$  de signe opposé et rien sur  $1s_1$  et  $1s_2$ . On va donc soustraire  $\hat{P}^{(T_2)}(1s_3)$  et  $\hat{P}^{(T_2)}(1s_4)$ . On a ainsi :  $\hat{P}^{(T_2)}(1s_4) - \hat{P}^{(T_2)}(1s_3) \propto (1s_4 - 1s_3)$  qui est orienté selon  $y$ . Pour l'orientation selon  $x$ , on peut commencer par regarder  $\hat{P}^{(T_2)}(1s_3) + \hat{P}^{(T_2)}(1s_4)$  (on a fait la différence avant, on fait donc la somme ici) qui vaut  $\frac{1}{\sqrt{12}} (2 \cdot 1s_3 + 2 \cdot 1s_4 - 2 \cdot 1s_1 - 2 \cdot 1s_2)$ . On va ensuite chercher à annuler la partie sur  $H_1$  et donc y ajouter  $\frac{2}{3}\hat{P}^{(T_2)}(1s_1)$ . On trouve donc :  $\frac{2}{3}\hat{P}^{(T_2)}(1s_1) + \hat{P}^{(T_2)}(1s_3) + \hat{P}^{(T_2)}(1s_4) \propto (1s_3 + 1s_4 - 2 \cdot 1s_2)$ . On pourra vérifier que ces 3 orbitales sont 2 à 2 orthogonales entre elles.

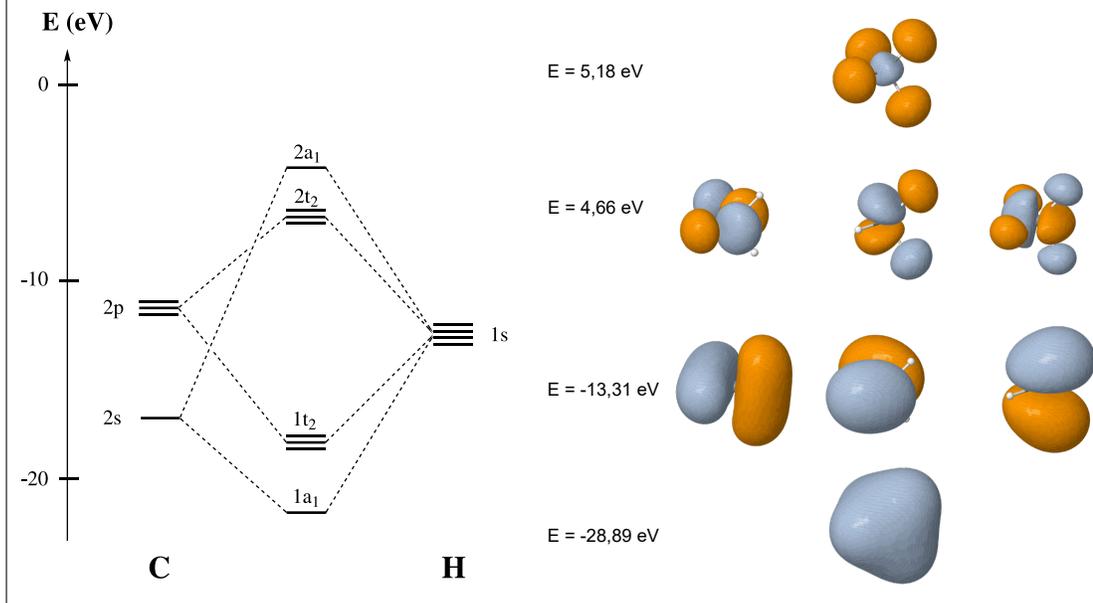
3. Fragment C : Décomposer en représentations irréductibles les orbitales  $2s$  et  $2p$  du carbone dans le groupe de  $\text{CH}_4$ , puis donner les bases pour ces représentations irréductibles.

On voit directement dans la table de caractères que  $2s$  est base de  $A_1$  et  $p_x, p_y$  et  $p_z$  sont bases de  $T_2$ .

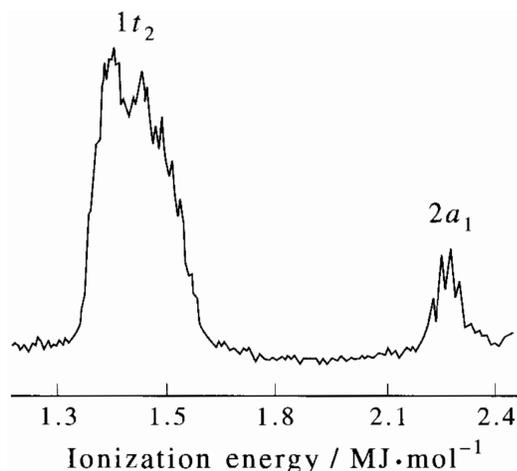
4. Déterminer les orbitales couplées via l'hamiltonien moléculaire. En se limitant à des interactions à deux niveaux, tracer qualitativement le diagramme d'orbitales moléculaires du méthane.

Les orbitales  $A_1$  de chaque bloc vont interagir entre elles sans se mêler aux  $T_2$ , et réciproquement. On a donc en tout 4 niveaux énergétiques  $1a_1, 1t_2, 2t_2$  et  $2a_1$  (les  $t_2$  étant 3 fois dégénérés).

Au sein des groupes  $T_2$ , on peut encore simplifier puisque les 3 orbitales  $y$  sont orthogonales : on a donc en fait 3 interactions à 2 orbitales ( $p_x/x$ ,  $p_y/y$ ,  $p_z/z$ ) qui sont stabilisées et déstabilisées de la même façon : on garde donc 2 blocs de 3 orbitales. On donne ci-dessous le diagramme énergétique ainsi que les orbitales issues du site OrbiMol.



5. Donner la configuration électronique du méthane dans son état fondamental. Interpréter le spectre de photoélectrons du méthane suivant :



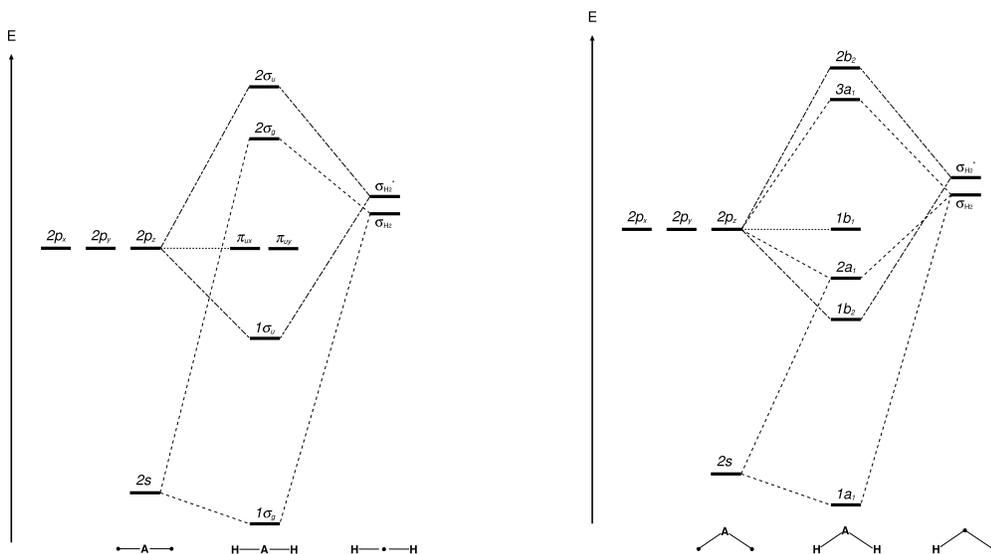
À l'état fondamental, la configuration électronique du méthane est  $(1a_1)^2(1t_2)^6$ . Sur le spectre de photoélectrons, on voit clairement 2 niveaux énergétiques, un à -23 eV et un à -16 eV : celui à -16 eV est beaucoup plus large que celui à -23 eV, il a donc une dégénérescence bien plus grande. L'énergie d'ionisation à -23 eV correspond donc aux orbitales  $a_1$  et celle à -16 eV correspond aux orbitales  $t_2$ . Sur les orbitales issues de OrbiMol, on peut lire que l'énergie de  $a_1$  est de -28,89 eV et celle du bloc  $t_2$  est de -13,31 eV : on retrouve donc bien le même résultat. On retrouve ici le fait qu'une dégénérescence en symétrie se retrouve dans les propriétés physiques des molécules, en particulier dans la dégénérescence des orbitales moléculaires.

### 17.3.3 Diagrammes d'OM de AH<sub>2</sub> et diagramme de Walsh (© X. Assfeld & C. Millot)

On considère une molécule de type AH<sub>2</sub> où A est un élément de la deuxième période du tableau périodique.

1. Construire les OM de cette molécule pour la configuration angulaire et pour la configuration linéaire. Afin de faire une comparaison directe des deux diagrammes d'OM, on choisira l'axe  $z$  selon l'axe C<sub>2</sub> de la configuration coudée et perpendiculaire à l'axe H-A-H pour la configuration linéaire.

On a tracé dans le cours le diagramme d'OM pour la géométrie angulaire, et on le rappelle ci-dessous. On va donc ici s'intéresser à la géométrie linéaire. On est dans le groupe ponctuel de symétrie  $D_{\infty h}$ . On va considérer les orbitales  $2s$  et  $2p$  du carbone ainsi que les  $\frac{1s_1+1s_2}{\sqrt{2}}$  et  $\frac{1s_1-1s_2}{\sqrt{2}}$  des hydrogènes. Les orbitales  $2s$  et  $\frac{1s_1+1s_2}{\sqrt{2}}$  ont mêmes symétries ( $\Sigma_g^+$ ). Il en est de même pour les  $2p_x$  et  $\frac{1s_1-1s_2}{\sqrt{2}}$  ( $\Sigma_u^+$ ). Enfin, les  $2p_y$  et  $2p_z$  sont de symétrie  $\Pi_u$ . On a donc 2 interactions à 2 orbitales et 2 orbitales qui resteront les mêmes. On peut donc tracer les diagrammes d'OM suivant :



La position des niveaux énergétiques (aussi bien des  $2s$  et  $2p$  que des OM formées) dépendent de l'atome A mais l'allure reste la même. La plus grosse incertitude repose sur la position des OM antiliantes qui peuvent parfois être inversées.

2. Corréler deux à deux les OM des deux conformères en précisant l'effet du changement de géométrie sur l'énergie de chaque OM.

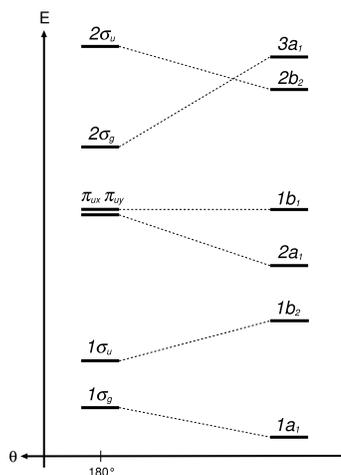
On va représenter la corrélation entre les OM selon l'évolution de l'angle  $\theta$  en partant de  $\theta = 180$  i.e. la géométrie linéaire.

- L'orbitale  $1\sigma_g$  se corrèle à la  $1a_1$  et va être stabilisée quand  $\theta$  va diminuer car le recouvrement augmente et favorise les interactions liantes.
- La  $1\sigma_u$  se corrèle à la  $1b_2$  et sera déstabilisée car le recouvrement diminue et les interactions antiliantes augmentent.
- La  $\pi_{ux}$  se corrèle à la  $2a_1$  et son énergie évoluera peu (mais diminuera) car elle s'hybride.
- La  $\pi_{uy}$  se corrèle à la  $1b_1$  et ne change pas (c'est la  $2p_y$  qui reste elle-même quelle que soit la géométrie).

— La  $2\sigma_g$  se corrèle à la  $3a_1$  et monte en énergie.

— La  $2\sigma_u$  se corrèle à la  $2b_2$  et baisse en énergie.

On trouve donc au final le diagramme de corrélation suivant :



On parle souvent de la règle de non-croisement pour dire que dans un diagramme de corrélation, 2 orbitales de mêmes symétries ne se croisent pas. Ici il y a croisement mais entre orbitales de symétries différentes donc cela ne pose pas de problèmes particuliers.

3. En appliquant la règle de Walsh, prédire la géométrie de  $\text{BeH}_2$ ,  $\text{CH}_2$ ,  $\text{NH}_2^+$  et  $\text{OH}_2$ .

—  $\text{BeH}_2$  a 4 électrons et est donc linéaire.

—  $\text{CH}_2$  a 6 électrons et est coudée.

—  $\text{NH}_2^+$  a 6 électrons et est coudée.

—  $\text{OH}_2$  a 8 électrons : la HO a une droite de corrélation horizontale et est donc insensible à la géométrie : on ne peut rien dire sur sa géométrie. On regarde donc la HO-1 : la molécule est coudée.

Pour finir, juste un commentaire sur le cas de la règle de Walsh avec des couches ouvertes : la seule possibilité envisageable est pour les métaux (les ions ont plutôt des couches fermées et les radicaux n'existent en général que sous une seule conformation), par exemple pour  $\text{ML}_4$  plan carré et tétraédrique. Il n'y a dans ce cas pas de règle générale et tout se fait au cas par cas.

### 17.3.4 Diagramme d'OM de $\text{CO}_2$

1. Construire les OM du fragment  $\text{O}\cdots\text{O}$  (molécule  $\text{O}_2$  étirée).

Les OM seront les mêmes que pour la molécule  $\text{O}_2$ . La distance passe de  $1,21 \text{ \AA}$  à  $2,38 \text{ \AA}$ , le recouvrement entre orbitales diminue donc fortement. Par exemple la différence énergétique entre la  $1\sigma_g$  et la  $1\sigma_u$  passe de  $15,30 \text{ eV}$  à  $1,77 \text{ eV}$ .

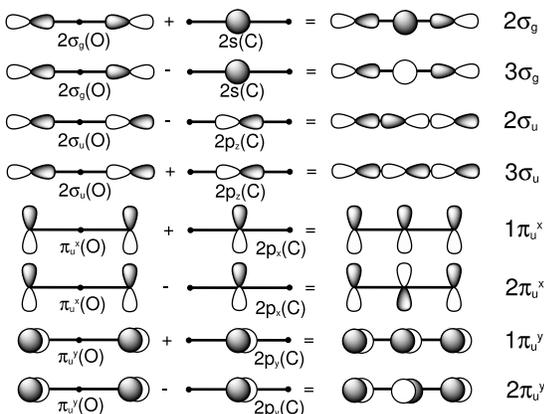
2. Donner la forme approximative des OM de  $\text{CO}_2$  par interaction entre les OS de  $\text{O}\cdots\text{O}$  et les OA de symétries convenables du carbone. Préciser leurs symétries.

On donne les valeurs suivantes :

| E(eV) | C     | O     |
|-------|-------|-------|
| 1s    | -288  | -538  |
| 2s    | -16,6 | -28,5 |
| 2p    | -11,3 | -13,6 |

On voit à nouveau qu'il est normal de ne pas s'intéresser aux OA  $1s$  vu leurs positions énergétique. Comme on vient de le voir, les combinaisons linéaires liantes et antiliantes des  $2s$  de l'oxygène changent assez peu en énergie, et resteront donc "autour" de  $-28,5$  eV. On les considère suffisamment loin en énergie des OA du carbone pour ne pas interagir avec celles-ci. Les OM  $1\sigma_g$  et  $1\sigma_u$  de  $O_2$  resteront donc inchangées.

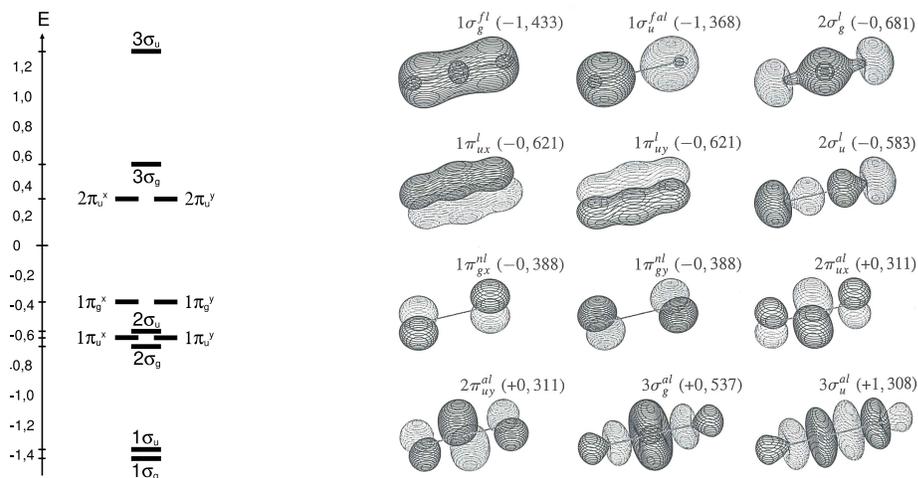
La  $2\sigma_g(O)$  va interagir avec la  $2s(C)$ ; la  $2\sigma_u(O)$  va interagir avec la  $2p_z(C)$ . La  $\pi_u^x$  et la  $\pi_u^y$  interagiront respectivement avec les  $2p_x(C)$  et  $2p_y(C)$ . Les  $\pi_g^x$  et  $\pi_g^y$  resteront inchangées car seules dans leurs géométries. On va donc avoir les formes suivantes pour les OM :



La  $1\sigma_g$  et la  $1\sigma_u$  sont les mêmes que dans le dioxygène. Il en est de même pour les  $\pi_g^x$  et  $\pi_g^y$ .

### 3. Construire le diagramme d'orbitales moléculaires du dioxyde de carbone.

On trouve donc le diagramme énergétique suivant. On donne aussi un extrait du livre de C. Leforestier (p372) représentant la forme des OM et leurs énergies calculées en HF. Selon la méthode utilisée, les OM  $2\sigma_u$  et  $1\pi_u$  peuvent s'inverser.



## 17.4 Méthode de Hückel

### 17.4.1 Formules de Coulson

Déterminer la longueur de chaîne minimum d'un polyène linéaire pour que ce dernier absorbe dans le visible. On prendra  $\beta = -250 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Pour une longueur d'onde de  $\lambda = 400nm$ , on trouve qu'il faut  $\Delta E = 299kJ/mol$ . La formule de Coulson pour un polyène linéaire à  $n$  atomes de carbone est :

$$\varepsilon_j = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$$

On suppose qu'on a un nombre pair de carbones ; on pose  $n = 2n'$  : l'absorption entre la HO  $\pi$  et la BV  $\pi^*$  se fera entre les OM  $n'$  et  $n' + 1$ . D'où :

$$\Delta\varepsilon = 2\beta \cos\left[\frac{(n'+1)\pi}{n+1}\right] - 2\beta \cos\left[\frac{(n')\pi}{n+1}\right] = 299kJ/mol$$

On peut donc écrire :

$$\cos\left(\underbrace{\frac{(n+2)\pi}{2n+2}}_p\right) - \cos\left(\underbrace{\frac{n\pi}{2n+2}}_q\right) = \frac{\Delta\varepsilon}{2\beta}$$

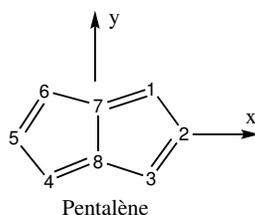
$$\begin{aligned} \text{Or : } \cos p - \cos q &= -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \cdot \sin\left(\underbrace{\frac{n\pi + 2\pi + n\pi}{2 \cdot (2n+2)}}_{\frac{\pi}{2}}\right) \end{aligned}$$

On cherche donc à résoudre :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{\Delta E}{-4\beta} = 0,299$$

On peut procéder pas à pas. Pour  $n = 4$  on trouve 0,309 et pour  $n = 5$  on trouve 0,259. D'après la théorie de Hückel, il faut donc au moins 5 atomes de carbone pour qu'il y ait absorption dans le visible. Les *cis* et *trans* 1,3,5-hexatriène ont 3 maximas d'absorption entre 245 et 270 nm : on ne retrouve donc pas exactement ce qu'on attendait, ce qui est une preuve des limites de la méthode.

#### 17.4.2 Le pentalène (© X. Assfeld)



1. Quel est le groupe de symétrie du pentalène ?

Le pentalène appartient au groupe de symétrie  $D_{2h}$ .

2. Trouver les OM  $\pi$  et leurs énergies dans le cadre de la méthode de Hückel (on indique qu'une orbitale moléculaire  $\pi$  a l'énergie  $\alpha - 1,8136\beta$ ).

On peut décomposer  $\Gamma_8$  en  $\Gamma_{2,5} \oplus \Gamma_{7,8} \oplus \Gamma_{1,3,4,6}$ . Si on fait la réduction en somme de RI, on trouve  $\Gamma_{2,5} = B_{2g} \oplus B_{1u}$ ,  $\Gamma_{7,8} = B_{3g} \oplus B_{1u}$  et  $\Gamma_{1,3,4,6} = B_{2g} \oplus B_{3g} \oplus B_{1u} \oplus A_u$ . On cherche donc maintenant les orbitales de symétrie bases des différentes RI. On peut déjà dire que pour  $\Gamma_{2,5}$  et  $\Gamma_{7,8}$ , l'une sera la somme des orbitales de la base et l'autre la différence.

Pour déterminer l'ensemble des OS, on peut par exemple le faire en cherchant les combinaisons linéaires qui se comporteront comme une translation ou une rotation, ou en regardant le comportement dans l'inversion et dans une autre opération de symétrie, ou bien sur appliquer la méthode des projecteurs. On va ici opter pour la deuxième méthode que nous n'avons pas encore utilisé : pour la  $A_u$ , le caractère de l'inversion est -1 donc  $p_1$  et  $p_4$  auront même signe, de même que  $p_3$  et  $p_6$ . Le caractère de  $\sigma_{xz}$  est -1 donc  $p_1$  et  $p_3$  ont des signes opposés. On trouve au final :

$$\phi_{A_u}(\Gamma_{1,3,4,6}) = \frac{1}{2}(p_1 - p_3 + p_4 - p_6)$$

Les autres OS sont :

$$\text{Pour } B_{1u} : \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 + p_5) ; \frac{1}{\sqrt{2}}(p_7 + p_8) ; \frac{1}{2}(p_1 + p_3 + p_4 + p_6)$$

$$\text{Pour } B_{3g} : \frac{1}{\sqrt{2}}(p_7 - p_8) ; \frac{1}{2}(p_1 - p_3 - p_4 + p_6)$$

$$\text{Pour } B_{2g} : \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 - p_5) ; \frac{1}{2}(p_1 + p_3 - p_4 - p_6)$$

L'orbitale  $A_u$  est seule dans sa symétrie, son énergie sera donc inchangée et vaudra  $\alpha$  (les 4 OA de cette OS ne sont pas sur des atomes liés entre eux, il n'y a donc pas d'intégrale de résonance qui interviendra). Pour  $B_{2g}$  on écrit le déterminant de Hückel dans la base des OS. On note  $\phi_1$  et  $\phi_2$  les deux orbitales  $B_{2g}$ , dans le même ordre que ci-dessus. On a donc :

$$\begin{aligned} H\phi_1 &= H \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 - p_5) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha p_2 + \beta(p_1 + p_3) - \alpha p_5 - \beta(p_4 + p_6)) \\ &= \alpha \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 - p_5) + \beta \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_3 - p_4 - p_6) \\ &= \alpha \phi_1 + \sqrt{2}\beta \phi_2 \end{aligned}$$

$$\text{et : } H\phi_2 = \alpha \phi_2 + \sqrt{2}\beta \phi_1$$

On trouve donc, dans la base  $\phi_1, \phi_2$  :

$$(H - E.Id) = \beta^2 \begin{vmatrix} x & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & x \end{vmatrix}$$

Ce qui peut se résoudre. On trouve alors  $x = \pm\sqrt{2}$ , et on en déduit les OM.

$$D'où : 1b_{2g} = 0, 500(p_2 - p_5) + 0, 354(p_1 + p_3 - p_4 - p_6) \text{ d'énergie } \alpha + \sqrt{2}\beta$$

$$2b_{2g} = 0, 500(p_2 - p_5) - 0, 354(p_1 + p_3 - p_4 - p_6) \text{ d'énergie } \alpha - \sqrt{2}\beta$$

Pour  $B_{3g}$  on procède de la même façon, et on trouve :

$$1b_{3g} = 0,408(p_7 - p_8) + 0,408(p_1 - p_3 - p_4 + p_6) \text{ d'énergie } \alpha + \beta$$

$$2b_{2g} = 0,577(p_7 - p_8) - 0,289(p_1 - p_3 - p_4 + p_6) \text{ d'énergie } \alpha - 2\beta$$

Pour la dernière symétrie ( $B_{1u}$ ), on combine 3 orbitales de symétrie. On trouve donc comme déterminant :

$$(H - E.Id) = \begin{vmatrix} x & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & x + 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & x \end{vmatrix} = \beta^3(x^3 + x^2 - 4x - 2)$$

L'énoncé nous donne la valeur de l'énergie d'une des OM pour faciliter la résolution du calcul :  $x = 1,814$  va être une des solutions du polynôme. Notons  $x_1$  et  $x_2$  les deux autres. On cherche donc à résoudre :

$$(x - 1,814)(x - x_1)(x - x_2) = x^3 - x^2(1,814 + x_1 + x_2) + x(1,814x_1 + 1,814x_2 + x_1x_2) - 1,814x_1x_2 = 0$$

Ce qui nous donne par identification :

$$\begin{aligned} 1,814 + x_1 + x_2 &= -1 \\ 1,814x_1 + 1,814x_2 + x_1x_2 &= -4 \\ -1,814x_1x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$x_1 = -2,814 - x_2 = \frac{2}{1,814x_2} \Leftrightarrow 1,814x_2^2 + 5,105x_2 + 2 = 0$$

On peut alors résoudre le système :

$$x_2 = -0,471 \text{ ou } x_2 = -2,343$$

On trouve au final 3 orbitales  $1b_{1u}$ ,  $2b_{1u}$  et  $3b_{1u}$  d'énergies respectives  $\alpha + 2,343\beta$ ,  $\alpha + 0,471\beta$  et  $\alpha - 1,814\beta$  et d'expressions :

$$\begin{aligned} 1b_{1u} &= 0,272(p_2 + p_5) + 0,474(p_7 + p_8) + 0,318(p_1 + p_3 + p_4 + p_6) \\ 2b_{1u} &= 0,513(p_2 + p_5) - 0,456(p_7 + p_8) + 0,121(p_1 + p_3 + p_4 + p_6) \\ 3b_{1u} &= 0,404(p_2 + p_5) + 0,261(p_7 + p_8) - 0,367(p_1 + p_3 + p_4 + p_6) \end{aligned}$$

3. Déterminer la population électronique et la charge nette de type  $\pi$  de chaque carbone.

Les populations électroniques de type  $\pi$  valent (en u.a.) : 0,815 (pour les atomes 1, 3, 4 et 6), 1,174 (pour les atomes 2 et 5) et 1,198 (pour les atomes 7 et 8). Les charges nettes valent respectivement 0,185, -0,174 et -0,198.

4. Calculer l'énergie de résonance.

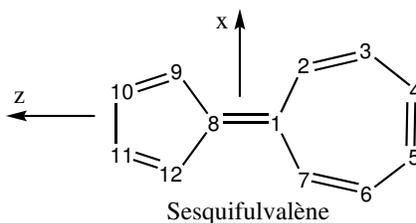
On a :  $E_\pi = 8\alpha + 10,456\beta$  et  $E_{res} = -2,456\beta$ .

5. Calculer les indices de liaison  $\pi$ . Déterminer l'indice de valence libre de chaque carbone.

$P_{12} = P_{23} = P_{45} = P_{56} = 0,650$ ,  $P_{17} = P_{38} = P_{84} = P_{67} = 0,524$  et  $P_{78} = 0,531$ .  
 Les liaisons 1-2, 2-3, 4-5 et 5-6 seront donc les plus courtes.  
 L'indice de valence libre ( $F_\mu = \sqrt{3} - \sum_\nu P_{\mu\nu}$ ) mesure le degré d'implication d'un atome dans le réseau de doubles liaisons conjuguées. On trouve :  $F_1 = F_3 = F_4 = F_6 = 0,558$ ,  $F_2 = F_5 = 0,432$  et  $F_7 = F_8 = 0,153$ . Les atomes 1, 3, 4 et 6 ont donc le plus grand caractère radicalaire.

### 17.4.3 Le sesquifulvalène (© X. Assfeld & C. Millot)

La molécule de sesquifulvalène possède un fort moment dipolaire orienté du cycle à 5 atomes de carbone vers celui à 7. Nous expliquerons l'existence de ce moment dipolaire en calculant les charges électriques  $\pi$  des deux cycles.



Le tableau ci-dessous donne certains coefficients des OA dans les OM, le type de symétrie (A ou B) des OM et l'énergie de certaines OM ( $\varepsilon = \alpha + m\beta$ ) calculées par la méthode de Hückel simple. Les OM sont sur les colonnes, les OA sont en ligne.

1. Retrouver les symétries manquantes.

On est dans le groupe ponctuel de symétrie  $C_{2v}$  :  $\Gamma_{12}$  s'écrit  $\{12 \ -2 \ -12 \ 2\}$  et se réduit en  $7B_2 \oplus 5A_2$ . Dans le tableau, on voit qu'il y a 6 orbitales données de symétries B et 4 de symétries A. Il en manque donc une de chaque géométrie. L'OM1 (la plus basse en énergie) est totalement symétrique, elle sera donc de type  $B_2$  et donc l'OM7 sera  $A_2$  pour avoir le bon nombre d'OM de chaque type.

2. Retrouver les coefficients manquants.

Le carré des coefficients des atomes équivalents seront égaux. On peut donc commencer par utiliser la condition de normalisation :  $\sum_i c_i^2 = 1$ .  
 Pour le signe il faut réfléchir sur le type d'OM auquel on a à faire. L'OM2 n'aura qu'un seul nœud et donc des coefficients positifs sur le cycle à 7 et des coefficients négatifs sur le cycle à 5 : d'où  $c_6 = +0,321$ . L'OM5 est uniquement développé sur le cycle à 5 et sera comme la deuxième OM du butadiène (ou comme 2 paires liantes de butadiène en opposition de phase), elle en a d'ailleurs la même énergie : d'où  $c_{12} = +0,602$ . L'OM10 quant à elle sera comme l'OM la plus haute en énergie du butadiène : d'où  $c_{12} = -0,372$ . Pour trouver ces coefficients, on peut aussi utiliser une méthode de projecteurs, mais c'est plus lourd à gérer.

3. Retrouver les énergies manquantes.

Pour répondre à la question, il faut revenir à l'équation de Schrödinger qu'on pourra ensuite développer. Écrivons  $\hat{\mathcal{H}}\psi = E\psi$  sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} = (\alpha + m\beta) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}$$

On prend l'OM5 pour l'exemple et pour bien fixer les idées. On re-écrit le système matricielle précédent on y introduisant les valeurs des coefficients  $c_i$ . Comme les coefficients pour les atomes de carbone de 1 à 7 sont nuls, on peut directement simplifier le système en ne prenant que le bloc qui nous intéresse :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0,602 \\ -0,372 \\ 0,372 \\ 0,602 \end{pmatrix} = (\alpha + m\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ -0,602 \\ -0,372 \\ 0,372 \\ 0,602 \end{pmatrix}$$

Pour que ces 5 équations soient valables, il faut  $m = 0,618$ , ce qui est bien la valeur donnée. Maintenant qu'on a validé notre méthode, on va s'intéresser à l'OM4. Ici, l'OM est développée sur le cycle à 7. L'équation de Schrödinger peut donc se re-écrire :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0,418 \\ -0,521 \\ -0,433 \\ 0,433 \\ 0,521 \\ 0,418 \end{pmatrix} = (\alpha + m\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ -0,418 \\ -0,521 \\ -0,433 \\ 0,433 \\ 0,521 \\ 0,418 \end{pmatrix}$$

Si on développe la première ligne on ne trouve rien d'intéressant. La deuxième ligne par contre nous donne :

$$-0,418\alpha - 0,521\beta = (\alpha + m\beta)(-0,418)$$

On trouve  $m_4 = 1,247$ . On pourra vérifier que toutes les autres lignes donnent la même valeur de  $m$ . Pour l'OM12 on peut faire comme précédemment et prendre la deuxième ligne (les valeurs des  $c_i$  sont  $[0,540; -0,334; 0,181; -0,057; -0,057; 0,181; -0,334; -0,501; 0,272; -0,086; -0,086; 0,272]$ ); on trouve alors  $m_{12} = -2,159$ .

On peut aussi utiliser la conservation de la trace. Dans la base des OA  $2p_z$ , la trace de la matrice vaut  $12\alpha$ . Dans la base des OM, elle vaut  $\sum \epsilon_i$  avec  $\epsilon_i = \alpha + m_i\beta$ .

Or la trace est indépendante de la base : il faut donc  $\sum m_i = 0$ . On trouve alors  $m_{12} = -2,163$ . La faible différence entre les deux valeurs est due aux erreurs d'arrondis. On peut vérifier que l'ordre de croissance de  $m$  est vérifié.

4. Déterminer l'énergie de formation du système  $\pi$ .

On place les 12 électrons dans les OM. Ils vont remplir les 6 OM les plus basses en énergie. L'énergie du système  $\pi$  vaut donc  $E^\pi = 12\alpha + 15,932\beta$ . Pris de manière isolé, chaque atome de carbone a une énergie  $\alpha$ . D'où une énergie de formation de  $15,932\beta$ .

5. Déterminer l'énergie de résonance de cette molécule.

L'énergie de résonance quantifie l'apport énergétique dû à la délocalisation. On compare donc le système avec des fragments localisés i.e. avec des fragments d'éthylène d'énergie  $2(\alpha + \beta)$ . L'énergie de résonance vaut donc  $6 \times 2(\alpha + \beta) - E^\pi = -3,932\beta$ .

6. Calculer les indices de liaison  $\pi$  ( $P_{ij}$ ) entre les atomes  $i$  et  $j$ , ainsi que les longueurs de liaison ( $R_{ij}$ ) en appliquant la formule  $R_{ij} = 1.517 - 0.18P_{ij} \text{ \AA}$ .

On a vu que :  $P_{RS} = \sum_i n_i c_i R c_{iS}$ . Seules les OM 1 à 6 sont occupées. On va écrire de manière complète les coefficients de ces orbitales pour les avoir sous les yeux pour le calcul :

|          | OM1   | OM2    | OM3    | OM4    | OM5    | OM6    |
|----------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $c_1$    | 0,449 | 0,149  | -0,459 | 0,000  | 0,000  | 0,064  |
| $c_2$    | 0,277 | 0,248  | -0,226 | -0,418 | 0,000  | 0,284  |
| $c_3$    | 0,184 | 0,321  | 0,153  | -0,521 | 0,000  | 0,098  |
| $c_4$    | 0,144 | 0,359  | 0,433  | -0,232 | 0,000  | -0,228 |
| $c_5$    | 0,144 | 0,359  | 0,433  | 0,232  | 0,000  | -0,228 |
| $c_6$    | 0,184 | 0,321  | 0,153  | 0,521  | 0,000  | 0,098  |
| $c_7$    | 0,277 | 0,248  | -0,226 | -0,418 | 0,000  | 0,284  |
| $c_8$    | 0,470 | -0,214 | -0,169 | 0,000  | 0,000  | -0,531 |
| $c_9$    | 0,313 | -0,277 | 0,115  | 0,000  | -0,602 | -0,183 |
| $c_{10}$ | 0,244 | -0,310 | 0,325  | 0,000  | -0,372 | 0,426  |
| $c_{11}$ | 0,244 | -0,310 | 0,325  | 0,000  | 0,372  | 0,426  |
| $c_{12}$ | 0,313 | -0,277 | 0,115  | 0,000  | 0,602  | -0,183 |

On peut donc calculer les indices de liaison et les longueurs de liaison :

|                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| $P_{1-2} = 0,566$   | $R_{1-2} = 1,415$   |
| $P_{2-3} = 0,683$   | $R_{2-3} = 1,394$   |
| $P_{3-4} = 0,613$   | $R_{3-4} = 1,407$   |
| $P_{4-5} = 0,671$   | $R_{4-5} = 1,396$   |
| $P_{5-6} = 0,613$   | $R_{5-6} = 1,407$   |
| $P_{6-7} = 0,683$   | $R_{6-7} = 1,394$   |
| $P_{7-1} = 0,566$   | $R_{7-1} = 1,415$   |
| $P_{1-8} = 0,445$   | $R_{1-8} = 1,437$   |
| $P_{8-9} = 0,568$   | $R_{8-9} = 1,415$   |
| $P_{9-10} = 0,691$  | $R_{9-10} = 1,393$  |
| $P_{10-11} = 0,609$ | $R_{10-11} = 1,407$ |
| $P_{11-12} = 0,691$ | $R_{11-12} = 1,393$ |
| $P_{12-8} = 0,568$  | $R_{12-8} = 1,415$  |

7. Calculer toutes les charges atomiques  $\pi$ . Calculer la charge nette de chaque cycle.

On a vu que la charge globale d'un atome A vaut  $Q_A = \sum_i n_i c_{iA}^2$  et sa charge nette vaut :  $q_A = N_A - Q_A$ . On trouve donc :

|                  |                   |
|------------------|-------------------|
| $Q_1 = 0,877$    | $q_1 = 0,123$     |
| $Q_2 = 0,889$    | $q_2 = 0,111$     |
| $Q_3 = 0,882$    | $q_3 = 0,118$     |
| $Q_4 = 0,886$    | $q_4 = 0,114$     |
| $Q_5 = 0,886$    | $q_5 = 0,114$     |
| $Q_6 = 0,882$    | $q_6 = 0,118$     |
| $Q_7 = 0,889$    | $q_7 = 0,111$     |
| $Q_8 = 1,154$    | $q_8 = -0,154$    |
| $Q_9 = 1,167$    | $q_9 = -0,168$    |
| $Q_{10} = 1,162$ | $q_{10} = -0,162$ |
| $Q_{11} = 1,162$ | $q_{11} = -0,162$ |
| $Q_{12} = 1,167$ | $q_{12} = -0,168$ |

On peut calculer la somme des charges globales de chaque cycle :  $Q_{1-7} = 6,191$  et  $Q_{8-12} = 5,812$  (la somme fait 12,003 : on ne retrouve pas exactement 12 à cause des erreurs d'arrondis). On peut aussi calculer la somme des charges nettes :  $q_{1-7} = 0,809$  et  $q_{8-12} = -0,812$ . On a donc un cycle chargé (+) et un cycle chargé (-) et donc un fort moment dipolaire orienté du cycle à 5 vers le cycle à 7.

|     | 1     | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 11     | 12     |
|-----|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| m   | 2,284 | 1,893  | 1,354  | ??     | 0,618  | 0,570  | -0,445 | -0,473 | -1,465 | -1,618 | -1,802 | ??     |
| Sym | ??    | B      | B      | A      | A      | B      | ??     | B      | B      | A      | A      | B      |
| 1   | 0,449 | 0,149  | -0,459 | 0,000  | 0,000  | 0,064  | 0,000  | -0,490 | -0,173 | 0,000  | 0,000  | 0,540  |
| 2   | 0,277 | 0,248  | -0,226 | -0,418 | 0,000  | 0,284  | -0,521 | 0,092  | 0,333  | 0,000  | 0,232  | -0,334 |
| 5   | 0,144 | 0,359  | 0,433  | 0,232  | 0,000  | -0,228 | -0,418 | -0,303 | 0,127  | 0,000  | -0,521 | -0,057 |
| 6   | 0,184 | ??     | 0,153  | 0,521  | 0,000  | 0,098  | -0,232 | 0,446  | -0,314 | 0,000  | 0,418  | 0,181  |
| 8   | 0,470 | -0,214 | -0,169 | 0,000  | 0,000  | -0,531 | 0,000  | 0,048  | -0,411 | 0,000  | 0,000  | -0,501 |
| 10  | 0,244 | -0,310 | 0,325  | 0,000  | -0,372 | 0,426  | 0,000  | -0,158 | -0,157 | -0,602 | 0,000  | -0,086 |
| 12  | 0,313 | -0,277 | 0,115  | 0,000  | ??     | -0,183 | 0,000  | 0,233  | 0,388  | ??     | 0,000  | 0,272  |

## 17.5 Bonus - Spectroscopie

### 17.5.1 L'atome d'hélium

On considère les configurations électroniques  $1s^2$ ,  $1s^1 2s^1$ ,  $1s^1 2p^1$  de l'atome d'hélium.

- Déterminer tous les termes spectroscopiques engendrés par ces trois configurations. Donner les dégénérescences associées.

— État fondamental  $1s^2$  : un seul terme spectroscopique  $^1S$  ( $g=1$ )

— Premier état excité  $1s^1 2s^1$  : on peut construire 4 déterminants de Slater :  $1s\alpha 2s\alpha$ ,  $1s\alpha 2s\beta$ ,  $1s\beta 2s\alpha$  et  $1s\beta 2s\beta$ . Dans les 4 cas on a  $M_L = 0$  d'où  $L = 0$ .  $M_S$  peut valoir  $-1/0/1$ . Il y aura donc un terme  $S = 1$  de dégénérescence 3. On enlève donc 3 termes (un pour  $M_S = 1$ , un pour  $M_S = 0$  et un pour  $M_S = -1$ ) et il ne reste que un terme avec  $M_S = 0$ . On a donc deux termes :  $^1S$  ( $g=1$ ) et  $^3S$  ( $g=3$ ).

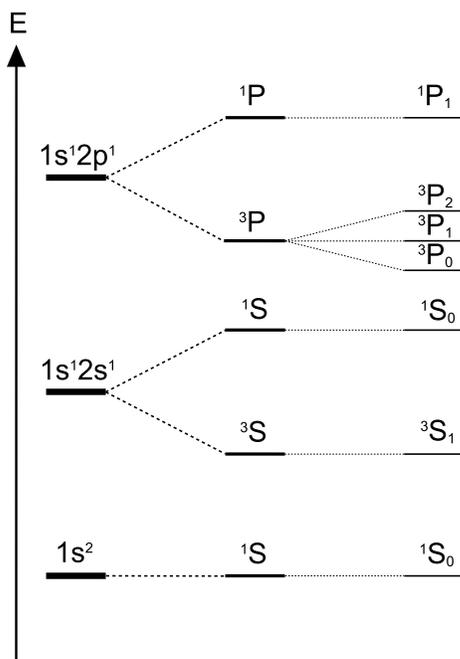
— Deuxième état excité  $1s^1 2p^1$  : tout comme pour le premier état excité, on peut répartir les électrons de différentes façons : il y en a 12 ici ( $2 \times 6$ ). Dans tous les cas on a  $M_L = 1$  et  $M_S$  peut valoir  $-1/0/1$ .  $M_L = 1$  implique des termes  $P$ . Il y aura un terme  $S = 1$  de dégénérescence 3; on enlève 3 termes correspondants et il ne reste que un terme avec  $M_S = 0$ . On a donc deux termes :  $^1P$  ( $g=3$ ) et  $^3P$  ( $g=9$ ).

2. Déterminer tous les états spectroscopiques engendrés par les termes spectroscopiques de l'hélium. Donner la dégénérescence associée à ces états.

— État fondamental  $1s^2$  :  $J$  ne peut valoir que 0 d'où un état  $^1S_0$  ( $g=1$ )  
 — Premier état excité  $1s^1 2s^1$  : chacun des termes déterminés précédemment n'engendre qu'un seul état, on a donc deux états :  $^1S_0$  ( $g=1$ ) et  $^3S_1$  ( $g=3$ )  
 — Deuxième état excité  $1s^1 2p^1$  :  $^1P$  donne naissance à  $^1P_1$  ( $g=3$ ) et  $^3P$  donne naissance à  $^3P_0$  ( $g=1$ ),  $^3P_1$  ( $g=3$ ) et  $^3P_2$  ( $g=5$ )

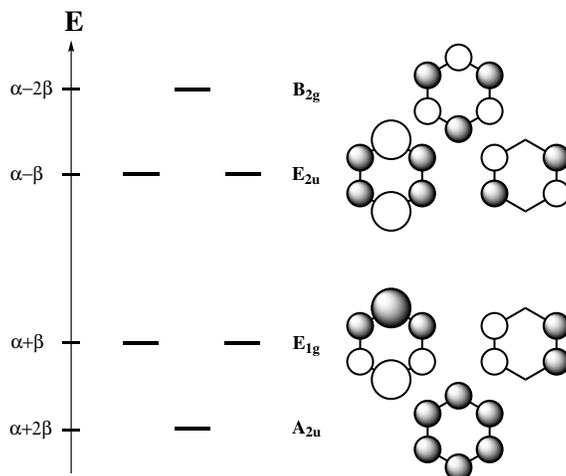
3. Classer en énergie les différents termes et états, en justifiant la réponse. Sur un même diagramme, représenter les trois configurations électroniques, et les termes et états spectroscopiques associés.

On commence par classer les configurations électroniques. Pour la configuration du premier état excité, on sait que l'état de plus basse énergie est celui de multiplicité de spin maximal i.e le terme  $^3S$ . Idem pour le deuxième état excité où le  $^3P$  est plus bas en énergie que le  $^1P$ . Pour classer les états du  $^3P$ , on sait que puisque la sous-couche est moins qu'à moitié remplie, l'énergie croît avec  $J$ . D'où le diagramme énergétique suivant.



### 17.5.2 Le benzène

On donne les OM du benzène, avec leurs symétries et leurs énergies calculées par la méthode de Hückel :



1. On donne  $\beta = -294 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Quelle est la longueur d'onde d'absorption attendue pour la transition électronique la moins énergétique du benzène ?

On s'attend à une transition électronique entre les niveaux  $E_{1g}$  et  $E_{2u}$  de valeur  $-2\beta = 588 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ , ce qui correspond à  $\lambda = 203 \text{ nm}$ .

2. En fait, le spectre U.V.-visible du benzène présente une bande d'absorption avec trois maxima pour :  $\lambda = 180 \text{ nm}$  ( $\varepsilon = 40000$ ),  $\lambda = 203,5 \text{ nm}$  ( $\varepsilon = 7400$ ) et  $\lambda = 254 \text{ nm}$  ( $\varepsilon = 204$ ). Commenter.

Les transitions physiques observées sont des transitions entre états électroniques, et pas entre configurations électroniques. C'est comme en spectroscopie atomique : pour une configuration électronique d'un atome ( $1s^2 2s^2 2p^2$  pour le carbone à l'état fondamental par exemple), on a plusieurs termes spectroscopiques selon comment on place les électrons dans les spin-orbitales ; ces termes correspondent aux niveaux énergétiques de l'atome ( $^1D$ ,  $^3P$ ,  $^1S$  pour notre exemple). Et en prenant en compte le couplage spin-orbite on passe aux états spectroscopiques ( $^1D_2$ ,  $^3P_{0,1,2}$ ,  $^1S_0$  pour notre exemple).

Le fondamental correspond ici à un état  $^1A_{1g}$  (tous les niveaux sont doublement occupés), et le premier état excité conduit à une représentation réductible  $E_{1g} \otimes E_{2u} = B_{1u} \oplus B_{2u} \oplus E_{1u}$  i.e. bien à 3 états ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux.

