(A) Rappels : Somme directe, supplémentaires et projecteurs

Soit V un espace vectoriel, W et W' deux sous-espaces de V. V est somme directe de W et W' si tout $x \in V$ peut s'écrire de façon <u>unique</u> comme

$$x = w + w' \quad \text{avec} \quad w \in W \text{ et } w' \in W'$$

$$(W \cap W' = 0 \quad \text{et} \quad \dim W + \dim W' = \dim V)$$

On dit alors que V est somme directe de W et W' noté : $V = W \oplus W'$ et W' est le <u>supplémentaire</u> de W dans V.

L'application linéaire p qui fait correspondre à tout $x \in V$ sa composante w dans V est appelé projecteur de V dans W (ou sur W) <u>associé à la décomposition</u> $V = W \oplus W'$. L'image de p est W et $p(x) = x$ si $x \in W$.
Réciproquement si p est une application linéaire vérifiant ces deux propriétés alors V est somme directe de $\operatorname{Im} p = W$ et $W' = \operatorname{Ker} p$.

Théorème

$\rho : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation

W un sous-espace de V stable par G

alors il existe un supplémentaire

W° de W dans V stable par G

$(V = W \oplus W^\circ)$

Démonstration

W sous-espace de V

soit W' un supplémentaire de W dans V et

p le projecteur associé à cette décomposition

$V = W \oplus W'$.

On pose

$$p^\circ = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1}$$

- p° applique V dans W
- d'autre part si $x \in W$, $\rho_t^{-1} x \in W$

donc $p \rho_t^{-1} x = \rho_t^{-1} x$

d'où $\rho_t \, p \, \rho_t^{-1} x = x$ et $p^\circ x = x$

p° est un projecteur de V sur W correspondant à un supplémentaire W° de W dans V.

En outre $\rho_s p^0 = p^0 \rho_s \quad \forall s \in G$

en effet $\rho_s p^0 \rho_s^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_s \rho_t \, p \, \rho_t^{-1} \rho_s^{-1}$

$$= \frac{1}{g} \sum_{t' \in G} \rho_{t'} \, p \, \rho_{t'}^{-1}$$

$$= p^0$$

Prenons maintenant $x \in W^0 \iff p^0 x = 0$

$$p_0 \rho_s x = \rho_s p_0 x = 0$$

$\Rightarrow \rho_s x \in W^0$

<u>W^0 est stable par ρ</u>

(B) Théorie des caractères compléments

Lemme de Schur

Soient $\rho^1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ et $\rho^2 : G \longrightarrow GL(V_2)$ deux représentations irréductibles de G, et soit f une application linéaire de V_1 dans V_2 telle que $\rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s$ pour tout $s \in G$. Alors :

(1) Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, on a $f = 0$

(2) Si $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, f est une homothétie (i.e. un multiple scalaire de $\mathbb{1}$: $\lambda \mathbb{1}$)

Le cas $f = 0$ est trivial. Supposons donc $f \neq 0$, et soit W_1 son noyau (l'ensemble des $x \in V_1$ tels que $f x = 0$).

Si $x \in W_1$, on a $\quad f \rho^1_s x = \rho^2_s f x = 0$

d'où $\rho^1_s x \in W_1$ et W_1 est stable par G. Comme V_1 est irréductible, W_1 est soit V_1 soit $\{0\}$; le cas $W_1 = V_1$ est exclu (on aurait $f = 0$) et on a donc $W_1 = \{0\}$. On démontre par le même argument que $\mathrm{Im}\, f = V_2$. Ces deux propriétés ($\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$; $\mathrm{Im}\, f = V_2$) montrent que f est un isomorphisme de V_1 sur V_2, Ce qui démontre l'assertion (1).

Supposons maintenant que $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, et soit λ une <u>valeur propre</u> de f : il en existe au moins une car nous n'avons considéré que des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Posons $f' = f - \lambda \mathbb{1}$. Comme λ est valeur propre de f, le noyau de f' est différent de $\{0\}$. D'autre part, on a encore $\rho_s^2 \circ f' = f' \circ \rho_s^1$ et la première partie de la démonstration montre que ces propriétés ne sont possibles que si $f' = 0$, c'est à dire $\underline{f = \lambda \mathbb{1}}$.

<u>Corollaire 1</u> : Soit h une application linéaire de V_1 dans V_2, et posons

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1$$

Alors :

(1) si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, $h^0 = 0$

(2) Si $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, h^0 est une homothétie de rapport $\frac{1}{n} \mathrm{Tr}(h)$, avec $n = \dim V_1$

En effet, $$(\rho_s^2)^{-1} h^0 \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_s^2)^{-1} (\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1 \rho_s^1$$

$$= \frac{1}{g} \sum_{t' \in G} \rho_{t'}^{2^{-1}} h \rho_{t'}^1 = h^0$$

soit $h^0 \rho_s^1 = \rho_s^2 h^0$

En appliquant le lemme de Schur à $f = h^\circ$ on trouve que dans le cas (1), $h^\circ = 0$ et dans le cas (2) h° est égal à un scalaire λ. Dans ce dernier cas on trouve λ à partir de

$$\mathrm{Tr}\, h^\circ = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \mathrm{Tr}(\rho_t^{2\,-1}\, h\, \rho_t^1) = \mathrm{Tr}\, h$$

or $\mathrm{Tr}\,\lambda = \lambda n$ d'où $\underline{\lambda = \frac{1}{n} \mathrm{Tr}\, h}$

On peut expliciter ceci en posant ρ^1 et ρ^2 sous forme matricielle :

$$\rho_t^1 = \left(R_{i_1 j_1}(t) \right), \quad \rho_t^2 = \left(R_{i_2 j_2}(t) \right)$$

Définissant l'application linéaire h par une matrice $(X_{i_2 i_1})$ et de même pour $h^\circ = (X^\circ_{i_2, i_1})$, on a

$$\underline{X^\circ_{i_2 i_1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \sum_{j_1, j_2} R_{i_2 j_2}(t^{-1}) X_{j_2 j_1} R_{j_1 i_1}(t)}$$

* Dans le cas (1) on a $X^\circ_{i_2, i_1} = 0$ $\forall X_{j_2 j_1}$

et ceci n'est possible que si

$$\underline{\frac{1}{g} \sum_{t \in G} R_{i_2 j_2}(t^{-1}) R_{j_1 i_1}(t) = 0 \quad \forall i_1, j_1, i_2, j_2}$$

(<u>corollaire 2</u>)

* Dans le cas (2) $\chi^{o}_{i_2 i_1} = \lambda \, \delta_{i_2 i_1}$ avec $\lambda = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} h$

ce que l'on peut écrire

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{j_1, j_2} \delta_{j_2 j_1} \, x_{j_2 j_1}$$

D'où

$$\frac{1}{g} \sum_{t \in G} \sum_{j_1 j_2} R_{i_2 j_2}(t^{-1}) \, x_{j_2 j_1} \, R_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n} \sum \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} \, x_{j_2 j_1}$$

et en égalant les coefficients des $x_{j_2 j_1}$ on obtient

$$\frac{1}{g} \sum_{t \in G} R_{i_2 j_2}(t^{-1}) \, R_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1} = \begin{cases} 1/n & \text{si } j_1 = j_2, \, i_1 = i_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(corollaire 3)

Théorème

① Si χ est le caractère d'une représentation irréductible, on a

$$(\chi \mid \chi) = 1$$

② Si χ et χ' sont les caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes, on a

$$(\chi \mid \chi') = 0$$

rappel : on a posé :

$$(\varphi \mid \psi) = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \varphi^{*}(s) \, \psi(s)$$

démonstration :

Soit ρ une représentation irréductible de caractère χ, donnée sous forme matricielle $\rho_t = (R_{ij}(t))$

$$(\chi \mid \chi) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \operatorname{Tr} R(t^{-1}) \cdot \operatorname{Tr} R(t)$$

$$(\chi(t^{-1}) = \chi^*(t))$$

$$= \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \sum_{i,j} R_{ii}(t^{-1})\, R_{jj}(t)$$

$$\underset{\text{corollaire 3}}{=} \sum_{i,j} \delta_{ij} \times \frac{1}{n} = 1$$

Et on démontre de même le cas (2).

Lemme 2

Soit f une fonction telle que

$$f(tst^{-1}) = f(s) \quad \forall s, t \in G$$

(fonction centrale, e.g. les caractères)

et Soit $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation linéaire de G. Soit enfin ρ_f l'application linéaire de V dans lui-même définie par:

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f(t) \rho_t .$$

Si V est irreductible, de degré n et de caractère χ, ρ_f est une homothétie de rapport λ donné par :

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} \chi(t) f(t) = \frac{g}{n} (\chi^* | f)$$

Nous allons utiliser pour démontrer ce lemme, le lemme de Schur.

Calculons $\rho_s^{-1} \rho_f \rho_s$:

$$\rho_s^{-1} \rho_f \rho_s = \sum_{t \in G} f(t) \rho_s^{-1} \rho_t \rho_s = \sum_{t \in G} f(t) \rho_{s^{-1}ts}$$

en posant $u = s^{-1} t s$

$$\rho_s^{-1} \rho_f \rho_s = \sum_{u \in G} f(sus^{-1}) \rho_u = \sum_{u \in G} f(u) \rho_u = \rho_f$$

et on a donc $\rho_f \rho_s = \rho_s \rho_f$. D'après la deuxième partie du lemme de Schur, ρ_f est une homothétie λ

Déterminons λ.

$$\mathrm{Tr}\, \rho_f = n\lambda = \sum_{t \in G} f(t)\, \mathrm{Tr}(\rho_t)$$

$$= \sum_{t \in G} \chi(t) f(t)$$

$$= g\,(\chi^* | f)$$

d'où $\underline{\lambda = \frac{g}{n}(\chi^* | f)}$

Théorème : Les caractères $\chi_1, \dots, \chi_h$ des représentations irréductibles de G forment une base orthonormales de l'espace vectoriel H des fonctions centrales sur G.

Le théorème d'orthogonalité des caractères montre que les χ_i forment un système orthonormal dans H ($\chi_i \in H$ car $\chi_i(sts^{-1}) = \chi_i(t)$).

Pour démontrer que les χ_i engendrent H, nous allons montrer que toute fonction orthogonale aux χ_i^* est nulle. ~~En~~ En effet, soit f une telle fonction ($f \in H$)

Pour toute représentation ρ de G, posons $$\rho_f = \sum_{t \in G} f(t) \rho_t$$

Puisque $(\chi_i^* | f) = 0 \quad \forall i$, le lemme 2 montre que ρ_f est nul lorsque ρ est une représentation irréductible. Par décomposition en somme directe, on montre que ρ_f est toujours nulle ($\forall$ la représentation ρ). Appliquons ceci à la <u>représentation régulière</u> et calculons $\rho_f e_1$:

$$\rho_f e_1 = \sum_{t \in G} f(t) \rho_t e_1 = \sum_{t \in G} f(t) e_t \underset{(\text{lemme } 2)}{=} 0$$

d'où $f(t) = 0 \ \forall t \in G$ et f est la fonction nulle sur G.

<u>Théorème</u>, nombre de représentations irréductibles d'un groupe :

> Le nombre de représentations irréductibles d'un groupe G (à un isomorphisme près) est égal au nombre de classes de G.

Soient $C_1, \dots C_k$ les différentes classes de G. Dire qu'une fonction f vérifie $f(s^{-1}ts) = f(t)$ (fonction centrale) équivaut à dire qu'elle est constante sur chacune des C_i. f est donc déterminée par ses valeurs f_i sur les C_i. On en déduit que la dimension de H est k le nombre de classes de G. Or, d'après le théorème précédent, les $\chi_1, \dots \chi_h$ forment une base de H, donc $k = h$.

Décomposition canonique d'une représentation

rappel : définition de la décomposition canonique

$\rho : G \to GL(V)$ une représentation linéaire

la décomposition en représentations ~~canonique~~ linéaires irréductibles n'est pas unique

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_h \oplus \cdots \oplus W_h$$

Si nous regroupons les W_i ensembles en posant

$$V_i = W_i \oplus \cdots \oplus W_i$$

On obtient la décomposition

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$$

appelée décomposition canonique de V

Théorème

i) La décomposition canonique $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$ ne dépend pas de la décomposition irréductible initiale

ii) le projecteur $p_i : V \to V_i$ associé à cette décomposition est

$$p_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i^*(t) \rho_t$$

On va montrer ii) et ii) implique ensuite i)
(p_i détermine V_i)

Posons $\quad q_i = \dfrac{n_i}{g} \displaystyle\sum_{t \in G} \chi_i^*(t)\, \rho_t$.

D'après le lemme 2, la restriction de q_i à une représentation irréductible W de caractère χ et de degré n est une homothétie de rapport

$$\frac{n_i}{n} \left(\chi^* \mid \chi_i^* \right) ; \text{ c'est donc } 0 \text{ si } \chi \neq \chi_i$$

et 1 si $\chi = \chi_i$ $\qquad \left((\chi^* \mid \varphi^*) = (\chi \mid \varphi)^* \right)$

q_i est alors l'identité sur une représentation irréductible ~~[illegible]~~ isomorphe à W_i et est nul sur les autres. Etant donnée la définition des V_j, q_i est l'identité sur V_i et est nul sur les V_j, $j \neq i$. Si l'on décompose un élément $x \in V$ en ses composantes $x_i \in V_i$:

$$x = x_1 + \dots + x_h,$$

on a $q_i(x) = q_i(x_1) + \dots + q_i(x_h) = q_i(x_i) = x_i$

q_i est donc bien le projecteur p_i de V sur V_i associé à la décomposition $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$

© Propriétés de symétrie en mécanique quantique

<u>Rappel</u> : Soient $R \in G$ une isométrie

et $f(\vec{r})$ une fonction de l'espace affine.

$$(\rho_R f)(\vec{r}) = f(R^{-1}\vec{r}) \quad \text{définit l'action de } R \text{ sur } f$$

($\rho_R f$ est la transformation de f par l'isométrie R)

Si on considère un espace vectoriel de fonctions (e.g. espace de Hilbert des fonctions d'ondes), cela définit une représentation de G.

Pour que ρ_R soit bien une action (ou une représentation) de G sur l'ensemble des fonctions, il faut $\rho_{R'}\rho_R f = \rho_{R'R} f$. En effet,

$$\begin{aligned}(\rho_{R'}\rho_R f)(\vec{r}) &= (\rho_R f)(R'^{-1}\vec{r}) \\ &= f(R^{-1}R'^{-1}\vec{r}) = f((R'R)^{-1}\vec{r}) \\ &= (\rho_{R'R} f)(\vec{r})\end{aligned}$$

et on a bien

$$\rho_{R'}\rho_R f = \rho_{R'R} f$$

Si on dispose d'un produit hermitien sur un espace de Hilbert de fonctions d'ondes :

$$\langle \Psi | \varphi \rangle = \int d^3\vec{r} \; \Psi^*(\vec{r}) \, \varphi(\vec{r}),$$

ce produit est conservé par ρ.

Soit $R \in G$, $\langle \rho_R \Psi | \rho_R \varphi \rangle = \int d^3\vec{r} \; \Psi^*(R^{-1}\vec{r}) \, \varphi(R^{-1}\vec{r})$

posons $\vec{r}\,' = R^{-1}\vec{r}$

$d^3\vec{r}\,' = d^3\vec{r}$ car R est une isométrie

$$\langle \rho_R \Psi | \rho_R \varphi \rangle = \int d^3\vec{r}\,' \; \Psi^*(\vec{r}\,') \, \varphi(\vec{r}\,')$$

$$= \langle \Psi | \varphi \rangle$$

Etats propres du système et représentation irréductibles

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \nabla_{\vec{r}}^{\,2} + V(\hat{\vec{r}}) \quad : \text{hamiltonien}$$

Opérateur (application linéaire) sur l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes.

On montre que $-\frac{1}{2}\nabla_{\vec{r}}^{\,2}$ commute avec tout opérateur ρ_R

Si la <u>fonction</u> $V(\vec{r})$ est stable par R (ou ρ_R) alors ρ_R commute avec l'<u>opérateur</u> $\hat{V}$ associé :

$$(\hat{V}\Psi)(\vec{r}) = V(\vec{r})\Psi(\vec{r})$$

en effet

$$\begin{aligned}(\rho_R \hat{V}\Psi)(\vec{r}) &= (\rho_R(\hat{V}\Psi))(\vec{r}) \\ &= (\hat{V}\Psi)(R^{-1}\vec{r}) \\ &= V(R^{-1}\vec{r})\,\Psi(R^{-1}\vec{r}) \\ &= V(\vec{r})\,(\rho_R\Psi)(\vec{r}) \\ &= (\hat{V}\rho_R\Psi)(\vec{r})\end{aligned}$$

et on a bien

$$\rho_R \hat{V}\Psi = \hat{V}\rho_R\Psi$$

c'est à dire $\underline{\rho_R \hat{V} = \hat{V}\rho_R}$

On en déduit qu'alors ρ_R commute avec $\hat{H}$.

$$\underline{[\rho_R ; \hat{H}] = 0}$$

Théorème 1 (direct)

Tout espace W propre de $\hat{H}$ est invariant par ρ_s $\forall s \in G$; W est donc stable par G

$$|\varphi\rangle \in W \iff \hat{H}|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$$

alors $\rho_s \hat{H}|\varphi\rangle = \rho_s \lambda |\varphi\rangle = \lambda \rho_s |\varphi\rangle$

$$= \hat{H}\rho_s|\varphi\rangle$$

$$[\hat{H}; \rho_s] = 0$$

$\Rightarrow \rho_s|\varphi\rangle \in W$

et W est bien stable par G.

Théorème 2 (réciproque)

Tout espace stable par G se transforme par $\hat{H}$ en un espace stable isomorphe du premier

Soit (f_i) une base de W stable par G

$$\rho_s f_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ji}(s) f_j$$

$(R_{ji}(s))$ matrice de ρ_s dans la base (f_i)

$$\hat{H}\rho_s f_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ji}(s)\, \hat{H} f_j$$

(les $R_{ji}(s)$ sont des nombres complexes)

$$\Rightarrow \rho_s(\hat{H}f_i) = \sum_{j=1}^{n} R_{ji}(s)(\hat{H}f_j)$$

Les vecteurs $(\hat{H}f_i)$ engendrent un espace stable par G de représentation ρ' isomorphe à ρ (même matrice mais dans une base différente)

$V = m_1 W_1 \oplus \cdots \oplus m_h W_h$ (décomp. canonique de V)

W_i représentation irréductible

$\hat{H} W_i$ est un espace stable par G de représentation isomorphe à W_i, donc irréductible

$$\hat{H} W_i \subset m_i W_i$$

* <u>cas simple</u> (représentation non dégénérée)

$m_i = 1$ (W_i stable par $\hat{H}$)

Alors W_i est inclus dans un espace propre de $\hat{H}$ et $\hat{H}$ est diagonale dans W_i. Dans le cas contraire, on peut diagonaliser $\hat{H}$ dans W_i et obtenir deux sous-espaces propres distincts mais qui seraient stables par G (théorème 1) ce qui est incompatible avec le fait que W_i est irréductible

Dans le cas $m_i = 1$, les symétries permettent de trouver un sous-espace propre de $\hat{H}$ sans autre calcul.

* <u>cas dégénéré</u> si $m_i > 1$

$$H m_i W_i \subset m_i W_i$$

mais il est maintenant nécessaire de diagonaliser $\hat{H}$ dans $m_i W_i$

Le problème est toutefois plus simple que le problème initial grâce aux symétries.